ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

λ - интенсивность входящего потока заявок;

μ - интенсивность обслуживания заявок одним каналом ($\mu=1/T$, T – среднее время обслуживания);

$\rho = \lambda/\mu$ — приведенная интенсивность потока;

N – число каналов;

M – максимальная длина очереди;

P_0 - вероятность того, что в системе нет заявок;

P_n - вероятность того, что в системе находится n заявок;

$P_{отк}$ – вероятность отказа (потери заявки) из-за занятости каналов;

$q=1-P_{отк}$ - относительная пропускная способность, доля обслуженных заявок;

$A=q\lambda$ - абсолютная пропускная способность, среднее число обслуженных заявок в единицу времени;

L_s - среднее число находящихся в системе заявок;

L_q - среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди);

W_s - среднее время пребывания заявки в системе;

W_q - средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди;

$\overline{N}$ - среднее число занятых каналов.

ОДНОКАНАЛЬНЫЕ СМО

Одноканальная СМО с отказами

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \qquad q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \qquad A = \lambda q = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}.$$

Одноканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью

(условие существования $\rho = \lambda/\mu < 1$)

$$P_n = (1-\rho)\rho^n, \qquad L_S = \frac{\rho}{1-\rho}; \qquad W_S = \frac{L_S}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)};$$

$$L_q = L_S - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}; \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}; \qquad P_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\rho^n, \ \rho\neq 1, \ n=0,1,2,\ldots,M; \\ \dfrac{1}{(M+1)}, \ \rho = 1. \end{cases} \qquad P_{отк} = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\right)\rho^M, \ \rho\neq 1; \\ \dfrac{1}{(M+1)}, \ \rho = 1; \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} 1-\left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{M+1}}\right)\rho^M, \ \rho\neq 1; \\ 1-\dfrac{1}{(M+1)}, \ \rho = 1; \end{cases} \qquad A = q\lambda; \qquad L_S = \begin{cases} \dfrac{\rho[1-(M+1)\rho^M + M\rho^{M+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{M+1})}, \ \rho\neq 1; \\ M/2, \ \rho = 1; \end{cases}$$

$$W_S = \frac{L_s}{\lambda(1-P_{отк})}; \qquad W_q = W_s - 1/\mu; \qquad L_q = \lambda(1-P_{отк})W_q.$$

МНОГОКАНАЛЬНЫЕ СМО

Многоканальная СМО с отказами

$$P_0 = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}; \quad P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{\rho^n}{n!} P_0,\ n = 0,1,\dots,N; \quad P_{отк} = \frac{\rho^N}{N!} P_0$$

$$q = 1 - \frac{\rho^N}{N!} P_0; \quad A = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^N}{N!} P_0\right); \quad \overline{N} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^N}{N!} P_0\right)$$

Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью

(условие существования $\rho = \lambda/\mu < N$)

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^N}{N! \left(1 - \frac{\rho}{N}\right)} \right)^{-1}; \quad P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0,\ при\ 0 \le n \le N \\ \frac{\rho^n}{N! \cdot N^{n-N}} \cdot P_0,\ при\ n \ge N \end{cases}$$

$$L_q = \frac{N\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)^2} \cdot P_0; \quad L_S = L_q + \rho; \quad W_q = L_q / \lambda; \quad W_S = \frac{L_S}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}; \quad \overline{N} = \rho$$

Многоканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^N}{N!} + \frac{\rho^{N+1}}{N \cdot N!} \cdot \frac{1 - \left(\rho/N\right)^M}{1 - \rho/N}}; \quad P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0,\ n = 1,2,\dots,N; \\ \frac{\rho^n}{N^{n-N} N!} P_0,\ n = N+1, N+2, \dots, N+M. \end{cases}$$

$$P_{отк} = \frac{\rho^{N+M}}{N^M N!} P_0; \quad q = 1 - \frac{\rho^{N+M}}{N^M N!} P_0; \quad A = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^{N+M}}{N^M N!} P_0\right); \quad \overline{N} = \frac{A}{\mu} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^{N+M}}{N^M N!} P_0\right)$$

$$L_q = \begin{cases} \frac{\rho^{N+1}}{N \cdot N!} \cdot \frac{1 - \left(\rho/N\right)^M \left(M + 1 - M\rho/N\right)}{\left(1 - \rho/N\right)^2} \cdot P_0,\ при\ \rho \ne N \\ \frac{\rho^{N+1}}{N \cdot N!} \cdot \left(1 + 2\left(\rho/N\right) + 3\left(\rho/N\right)^2 + \dots + M\left(\rho/N\right)^{M-1}\right) \cdot P_0,\ при\ \rho = N \end{cases}$$

$$L_S = \overline{N} + L_q; \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}; \quad W_S = W_q + \frac{q}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{q}{\mu}$$