**Исследование операций и методы оптимизации**

**Аспирантура**

**конспект лекций, очная форма обучения**

В данном конспекте лекций будут рассмотрены методы решения оптимизационных задач, то есть задач принятия решений в задачах экономики и управления, связанные с тем, что необходимо подобрать такие условия, чтобы некоторый итоговый показатель экономической или иной деятельности достиг своего оптимального, наиболее эффективного значения. В основе методов решения таких задач лежат методы математического программирования, а точнее, важный частный случай таких методов – методы линейного программирования, которые рассмотрим далее.

# Тема 1. Методы линейного программирования

Многие задачи, с которыми приходится иметь дело в повседневной практике, являются многовариантными. Среди множества возможных вариантов в условиях рыночных отношений приходится отыскивать наилучшие в некотором смысле при ограничениях, налагаемых на природные, экономические и технологические возможности. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа и синтеза экономических ситуаций и систем математические методы и современную вычислительную технику. Такие методы объединяются под общим названием — математическое программирование.

## **1.1. Постановка задачи линейного программирования**

*Математическое программирование —* область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Функцию, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, называют *целевой, показателем эффективности* или *критерием оптимальности.* Экономические возможности формализуются в виде *системы ограничений.* Все это составляет математическую модель. *Математическая модель* задачи — это отражение оригинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д. Модель задачи математического программирования включает:

1. совокупность неизвестных величин*,* действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют *планом задачи* (вектором управления, решением, управлением, стратегией, поведением и др.);
2. целевую функцию (функцию цели, показатель эффективности, критерий оптимальности, функционал задачи и др.). Целевая функция позволяет выбирать наилучший вариант — из множества возможных. Наилучший вариант доставляет целевой функции экстремальное значение. Это могут быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, уровень обслуживания или дефицитности, число комплектов, отходы и т. д.

Эти условия следуют из ограниченности ресурсов, которыми располагает общество в любой момент времени, из необходимости удовлетворения насущных потребностей, из условий производственных и технологических процессов. Ограниченными являются не только материальные, финансовые и трудовые ресурсы. Таковыми могут быть возможности технического, технологического и вообще научного потенциала. Нередко потребности превышают возможности их удовлетворения. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует *область допустимых решений (область экономических возможностей).* План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется *допустимым*. Допустимый план, доставляющий функции цели экстремальное значение, называется *оптимальным.* Оптимальное решение, вообще говоря, не обязательно единственно, возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесчисленное множество оптимальных решений.

Один из разделов математического программирования — *линейное программирование*. Методы и модели линейного программирования широко применяются при оптимизации процессов во всех отраслях народного хозяйства: при разработке производственной программы предприятия, распределении ее по исполнителям, при размещении заказов между исполнителями и по временным интервалам, при определении наилучшего ассортимента выпускаемой продукции, в задачах перспективного, текущего и оперативного планирования и управления; при планировании грузопотоков, определении плана товарооборота и его распределении; в задачах развития и размещения производительных сил, баз и складов систем обращения материальных ресурсов и т. д. Особенно широкое применение методы и модели линейного программирования получили при решении задач экономии ресурсов (выбор ресурсосберегающих технологий, составление смесей, раскрой материалов), производственно-транспортных и других задач.

Начало линейному программированию было положено в 1939 г. советским математиком-экономистом Л. В. Канторовичем в работе «Математические методы организации и планирования производства». Появление этой работы открыло новый этап в применении математики в экономике. Спустя десять лет американский математик Дж. Данциг разработал эффективный метод решения данного класса задач — симплекс-метод [2, 3, 11]. Общая идея *симплексного метода (метода последовательного улучшения плана)* для решения ЗЛП состоит в следующем:

1. умение находить начальный опорный план;
2. наличие признака оптимальности опорного плана;
3. умение переходить к нехудшему опорному плану.

*Линейное программирование* — раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные. По типу решаемых задач его методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые *задачи линейного программирования* (ЗЛП). Специальные методы учитывают особенности модели задачи, ее целевой функции и системы ограничений.

Особенностью задач линейного программирования является то, что экстремума целевая функция достигает на границе области допустимых решений. Классические же методы дифференциального исчисления связаны с нахождением экстремумов функции во внутренней точке области допустимых значений. Отсюда — необходимость разработки новых методов.

Формы записи задачи линейного программирования.

Дана система *m* уравнений и неравенств с *n* переменными

 (1)

и линейная функция

. (2)

Необходимо найти такое решение системы (8.1) с неотрицательными компонентами , при котором линейная функция *f* принимает наибольшее (наименьшее) значение.

## **1.2. Основные виды экономических задач, сводящихся к ЗЛП**

**Задача о наилучшем использовании ресурсов.** Пусть некоторая производственная единица (цех, завод, объединение и т. д.), исходя из конъюнктуры рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресурсов, может выпускать n различных видов продукции (товаров), известных под номерами, обозначаемыми индексом *j,* . Будем обозначать эту продукцию *.* Предприятие при производстве этих видов продукции должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий, других производственных факторов (сырья, полуфабрикатов, рабочей силы, оборудования, электроэнергии и т. д.). Все эти виды ограничивающих факторов называют ингредиентами . Пусть их число равно *m*; припишем им индекс *i,* . Они ограничены, и их количества равны соответственно  условных единиц. Таким образом,  — вектор ресурсов. Известна экономическая выгода (мера полезности) производства продукции каждого вида, исчисляемая, скажем, по отпускной цене товара, его прибыльности, издержкам производства, степени удовлетворения потребностей и т. д. Примем в качестве такой меры, например, цену реализации , т. е.  —вектор цен. Известны также технологические коэффициенты , которые указывают, сколько единиц *i*-го ресурса требуется для производства единицы продукции *j*-го вида. Матрицу коэффициентов  называют технологической и обозначают буквой *А.*Имеем . Обозначим через план производства, показывающий, какие виды товаров  нужно производить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприятию максимум объема реализации при имеющихся ресурсах.

Так как  — цена реализации единицы *j*-й продукции, цена реализованных  единиц будет равна , а общий объем реализации . Это выражение — целевая функция, которую нужно максимизировать.

Так как  — расход *i*-го ресурса на производство  единиц *j*-й продукции, то, просуммировав расход *i*-горесурса на выпуск всех *n* видов продукции, получим общий расход этого ресурса, который не должен превосходить ,  единиц:

.

Чтобы искомый план был реализован, наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объемы  выпуска продукции: , .

Таким образом, модель задачи о наилучшем использовании ресурсов примет вид:

, (16)

при ограничениях:

, ; (17)

, . (18)

Так как переменные  входят в функцию  и систему ограничений только в первой степени, а показатели  являются постоянными в планируемый период, то (16)–(18) — задача линейного программирования.

**Задача о смесях.** В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигают на первый план следующую задачу: получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

**Пример.** Для откорма животных используют три вида комбикорма: А, В и С. Каждому животному в сутки требуется не менее 800 г. жиров, 700 г. белков и 900 г. углеводов. Содержание в 1 кг. каждого вида комбикорма жиров, белков и углеводов (граммы) приведено в табл. 1.

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| Содержание в 1 кг | Комбикорм |
| А | В | С |
| Жиры | 320 | 240 | 300 |
| Белки | 170 | 130 | 110 |
| Углеводы | 380 | 440 | 450 |
| Стоимость 1 кг | 31 | 23 | 20 |

Сколько килограммов каждого вида комбикорма нужно каждому животному, чтобы полученная смесь имела минимальную стоимость?

Математическая модель задачи есть:  — количество комбикорма А, В и С. Стоимость смеси есть:



Ограничения на количество ингредиентов:



**Задача о раскрое материалов.** Сущность задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму. Рассматривается простейшая модель раскроя по одному измерению. Более сложные постановки ведут к задачам целочисленного программирования.

**Задача о назначениях.** Речь идет о задаче распределения заказа (загрузки взаимозаменяемых групп оборудования) между предприятиями (цехами, станками, исполнителями) с различными производственными и технологическими характеристиками, но взаимозаменяемыми в смысле выполнения заказа. Требуется составить план размещения заказа (загрузки оборудования), при котором с имеющимися производственными возможностями заказ был бы выполнен, а показатель эффективности достигал экстремального значения.

Подробно задача о назначениях будет рассмотрена далее.

**Транспортная задача**. Рассматривается простейший вариант модели транспортной задачи, когда речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителям; при этом имеется баланс между суммарным спросом потребителей и возможностями поставщиков по их удовлетворению. Причем потребителям безразлично, из каких пунктов производства будет поступать продукция, лишь бы их заявки были полностью удовлетворены. Так как от схемы прикрепления потребителей к поставщикам существенно зависит объем транспортной работы, возникает задача о наиболее рациональном прикреплении, правильном направлении перевозок грузов, при котором потребности полностью удовлетворяются, вся продукция от поставщиков вывозится, а затраты на транспортировку минимальны.

Анализ и методы решения транспортных задач подробнее рассмотрим далее.

# Тема 2. Транспортная задача

В следующих трех темах рассмотрены некоторые оптимизационные задачи принятия решений распределительного типа. Распределительными задачами называются практические задачи, в которых нужно распределить некоторые объекты по субъектам на основании принципа оптимальности. Сначала рассмотрим наиболее общую задачу данного типа, которая называется «транспортной», хотя в реальной практике она возникает в достаточно широком спектре задач принятия решений, например, при планировании перевозок, организации и планировании проектов, составлении расписаний и многих других.

## **2.1. Математическая модель транспортной задачи.**

Линейные транспортные задачи составляют особый класс задач линейного программирования. Задача заключается в отыскании такого плана перевозок продукции с *m* складов в пункт назначения *n,* который потребовал бы минимальных затрат. Если потребитель *j* получает единицу продукции (по прямой дороге) со склада *i,* то возникают издержки *Сij*. Предполагается, что транспортные расходы пропорциональны перевозимому количеству продукции, т. е. перевозка *k* единиц продукции вызывает расходы *kСi j*.

Далее предполагается, что



где *ai* есть количество продукции, находящееся на складе *i*, и *bj* — потребность потребителя *j*. Такая транспортная задача называется закрытой. Однако, если данное равенство не выполняется, то получаем открытую транспортную задачу, которая сводится к закрытой по следующим правилам:

1. Если сумма запасов в пунктах отправления превышает сумму поданных заявок  то количество продукции, равное  остается на складах. В этом случае мы введем «фиктивного» потребителя *n* +1 с потребностью  и положим транспортные расходы *pi,n*+1 равными 0 для всех *i*.

2. Если сумма поданных заявок превышает наличные запасы  то потребность не может быть покрыта. Эту задачу можно свести к обычной транспортной задаче с правильным балансом, если ввести фиктивный пункт отправления m + 1 с запасом  и стоимость перевозок из фиктивного пункта отправления во все пункты назначения принять равным нулю.

Математическая модель транспортной задачи имеет вид:

,





,

где *xij* количество продукции, поставляемое со склада *i* потребителю *j*, а *С ij*издержки (стоимость перевозок со склада *i* потребителю *j*).Рассмотрим пример.

**Пример.**Компания «Стройгранит» производит добычу строительной щебенки и имеет на территории региона три карьера. Запасы щебенки на карьерах соответственно равны 800, 900 и 600 тыс. тонн. Четыре строительные организации, проводящие строительные работы на разных объектах этого же региона, дали заказ на поставку соответственно 300, 600, 650 и 750 тыс. тонн щебенки. Стоимости перевозки 1 тыс. тонн щебенки с каждого карьера на каждый объект приведены в табл. 1.

Необходимо составить такой план перевозки (количество щебенки, перевозимой с каждого карьера на каждый строительный объект), чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальными. Составить задачу линейного программирования, решение которой позволит решить данную задачу.

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| Карьер | Строительный объект |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| *1* | 8 | 4 | 1 | 7 |
| *2* | 3 | 6 | 7 | 3 |
| *3* | 6 | 5 | 11 | 8 |

Данная транспортная задача является закрытой, так как запасы поставщиков: 800 + 900 + 600 = 2300 равны спросу потребителей 300 + 600 + 650 + 750 = 2300. Математическая модель ЗЛП в данном случае имеет вид:  — количество щебенки, перевозимой с *i-*го карьера на *j-*й объект. Тогда целевая функция равна



Ограничения имеют вид



В рамках данного примера мы составили математическую модель задачи линейного программирования, но не провели ее решение. Решить эту задачу можно на компьютере, например с помощью электронных таблиц MS Excel. Методика проведения расчетов будет приведена в заключительном разделе этой темы.

Однако решение задачи возможно и аналитически, без использования вычислительной техники. Один из методов решения транспортных задач называется распределительным методом или методом потенциалов.

# Тема 3. Задача о назначениях

Задача о назначениях является распределительной оптимизационной задачей, в чем-то схожей с транспортной задачей. Задача о назначениях широко используется при принятии управленческих решений. Эта задача позволяет распределить объекты из некоторого множества по группе субъектов из другого множества и это распределение должно соответствовать оптимальности одного или нескольких итоговых показателей.

Рассмотрим несколько примеров.

Организуется рекламная акция, в которой участвуют некоторое количество промоутеров. Мероприятия нужно провести в нескольких районах города. Как распределить промоутеров по районам, чтобы эффективность акции была максимальной?

На предприятии в цеху работают несколько рабочих, которым необходимо изготовить какое-то количество деталей разного вида. Каждый рабочий изготавливает разного вида детали с разным процентом брака. Как распределить заказ деталей по рабочим, чтобы суммарный процент брака был минимален?

 Через отдел подготовки крупного издательства проходит множество рукописей книг. Эти рукописи необходимо распределять между сотрудниками. Каждая рукопись может быть охарактеризована оценками по таким критериям, как важность, срочность выполнения, тематика. В свою очередь, сотрудники могут быть охарактеризованы оценками по таким критериям, как качество работы, индивидуальная «пропускная способность», предпочитаемая тематика и т.д. Необходимо так распределить рукописи среди сотрудников, чтобы получить приемлемое качество выполнения всех работ при минимальных ресурсных затратах.

Большая фирма переезжает в новое здание. Возникает необходимость распределить сотрудников по помещениям. С одной стороны, каждый сотрудник выдвигает определенные требования к своим соседям (например, предпочитает некурящих) и к расположению комнаты (например, вблизи от коллег по совместному проекту). С другой стороны, каждое помещение имеет определенные характеристики. Необходимо найти такой вариант распределения, при котором, по меньшей мере, не ухудшился бы психологический климат в коллективе.

Помимо описанных выше примеров, такая задача имеет место при назначении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, при распределении студенческих групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабораториям и т.п. Как видно из примеров, задача о назначениях является частным случаем общих классов оптимизационных задач, и поэтому существует много разнообразных методов ее решения.

Впервые задача о назначениях была рассмотрена Гаспаром Монжем (1746-1818) в 1784 году в геометрической форме. Монж рассматривает задачу о перевозке земли с одного участка на другой, с той же площадью. При этом земля на участке рассматривается как множество «молекул» разного веса, и ставится задача выбора такого способа транспортировки, при котором суммарное перемещение молекул будет минимальным. Монж предложил геометрический способ решения задачи: перемещать молекулы по прямым, касательным к обеим областям. Позднее, в начале XX века, была показана некорректность решения Монжа. Следующие шаги в решении задачи о назначениях относятся к первой трети XX века и связаны с именами Кёнига и Эгервари.

На языке дискретной математики задача о назначениях может быть переформулирована как задача поиска совершенного паросочетания минимального веса во взвешенном двудольном графе. Работы Кёнига и Эгервари стали основой для «венгерского» метода решения задачи о назначениях, разработанного Куном в 50-х годах. В конце 40-х годов XX века были созданы первые ЭВМ. Задача о назначениях была в ряду первых задач, которые решались с помощью компьютера. Развитие вычислительной техники привело к бурному развитию методов оптимизации. Тем временем, в 1947 году Данциг предложил очень эффективный метод для решения общей задачи линейного программирования, получивший название симплекс-метод.

Задача о назначениях может быть легко сведена к задаче линейного программирования, если ввести для каждого элемента матрицы стоимостей свою переменную, принимающую значения 0 или 1, и записать *2n* ограничений, что в каждом столбце и каждой строке сумма элементов строго равна единице.

Сформулируем математическую модель задачи о назначениях на примере ресурсов по выполняемым работам. Пусть для выполнения некоторого проекта необходимы ограниченные ресурсы. Например, такими ресурсами могут выступать труд (рабочий для выполнения работы), оборудование (станок для изготовления детали), транспорт (автомобиль для перевозки груза) и т.д. Эти ресурсы предназначены для выполнения некоторых работ, и рассмотрим простейший случай, когда для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна автомашина и т.д.), а каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе. Таким образом, ресурсы неделимы между работами, а работы неделимы между ресурсами.

Исходные параметры модели задачи о назначениях:

1. *n* – количество ресурсов, *m* – количество работ.

2.  – единичное количество ресурса , например: один работник; одно транспортное средство; одна научная тема и т.д.

3.  – единичное количество работы , например: одна должность; один маршрут; одна лаборатория.

4.  – характеристика качества выполнения работы  с помощью ресурса . Например, компетентность *i*-го работника при работе на *j*-й должности; время, за которое *i*-е транспортное средство перевезет груз по *j*-му маршруту; степень квалификации *i*-й лаборатории при работе над *j*-й научной темой. Величину  можно рассматривать как показатель привлекательности (критерий) для альтернативы .

В качестве исходных данных введем переменные  – факт назначения или неназначения ресурса  на работу , которая определяется по правилу:



Также имеется некоторая целевая функция , равная общей (суммарной) характеристики качества распределения ресурсов по работам. Это может быть прибыль или процент брака, издержки или себестоимость продукции, время производства или время эксплуатации ресурсов. Эта функция зависит от характеристик , которые образуют матрицу, вид которой представлен в табл. 1.

Таблица 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ресурсы,  | Работы,  | Количество ресурсов |
|  |  | … |  |
|  |  |  | … |  | 1 |
|  |  |  | … |  | 1 |
| … | … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  | 1 |
| Количество работ | 1 | 1 | … | 1 |  |

Эта матрица называется матрицей эффективностей (при максимизации целевой функции) или матрицей затрат (при минимизации). Математическая модель задачи о назначениях имеет вид:

**

Как видно, получили задачу линейного программирования. Ее решение можно осуществлять разными методами, в том числе на ЭВМ.

# Тема 4. Задача коммивояжера

Задача коммивояжера – еще одна из задач распределительного типа, подобная транспортной и задаче о назначениях. Это одна из самых известных задач [комбинаторной оптимизации](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BE%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F), заключающаяся в поиске самого выгодного [маршрута](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D0%B0%D1%80%D1%88%D1%80%D1%83%D1%82_(%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D0%BE%D0%B2)&action=edit&redlink=1), проходящего через указанные города хотя бы по одному разу с последующим возвратом в исходный город. Рассмотрим задачу коммивояжера подробнее.

Задача коммивояжера является одной из знаменитых задач теории комбинаторики. Она была поставлена в 1934 году, и об неё, как об Великую теорему Ферма «обламывали зубы» лучшие математики. В своей области оптимизации дискретных задач, задача коммивояжера служит своеобразным полигоном, на котором испытываются всё новые методы.

Постановка задачи следующая. Коммивояжер (переводится как «бродячий торговец») должен выйти из некоторого города, посетить по разу в некотором порядке все остальные города, и вернуться в исходный город. Расстояния между городами известны. В каком порядке следует обходить города, чтобы замкнутый путь (маршрут) коммивояжера был кратчайшим? Вместо расстояний между городами могут выступать стоимости переезда между городами или времена переездов. В этом случае будет минимизироваться суммарная стоимость или время.

Задача коммивояжера занимает особое место в комбинаторной оптимизации и исследовании операций. Исторически она была одной из тех задач, которые послужили толчком для развития этих направлений. Простота формулировки, конечность множества допустимых решений, наглядность и, в тоже время, колоссальные затраты на полный перебор до сих пор подталкивают математиков к разработке все новых и новых численных методов. Фактически, все свежие идеи сначала тестируются на этой задаче. Также важны её обобщения для транспорта и логистики, когда несколько транспортных средств ограниченной грузоподъемности должны обслуживать клиентов, посещая их в заданные временные окна.

Рассмотрим, как задачу коммивояжера можно свести к задаче линейного программирования.

Пусть имеется *n* городов, между каждой парой которых с номерами *i* и *j* известно расстояние (или время перемещения, стоимость проезда), которое обозначим *Cij*. Необходимо так спланировать посещение всех городов по одному разу, начиная с заданного, чтобы суммарное расстояние (время, стоимость) было минимальным.

Введем переменные *xij*, которые могут принимать значения равные либо 0, либо 1 и имеющие смысл:



Для решения задачи нужно решать ЗЛП вида:

  (1)

с ограничениями

 , *i*, *j* = 1,…, *n,* (2)

и условием связности маршрута

 , *i* ≠ *j*, *i*, *j* = 2,…, *n*. (3)

где *ui* – некоторые дополнительные переменные. Кроме того переменные *xij* должны быть двоичными, то есть 0 или 1, что можно задать как

 (4)

 и диагональные элементы, соответствующие переезду из города в этот же город, должны быть нулевыми:

*xii* = 0. (5)

Целевая функция (1) с ограничением (2) – (5) составляют задачу линейного программирования, позволяющую решить задачу коммивояжера. Следует отметить, что, если исключить ограничения (3) и (5), получим математическую модель задачи о назначениях, рассмотренную в предыдущей теме.

# Тема 5. Метод динамического программирования

В теории управления и принятия решений для оптимизации сложных функциональных зависимостей, особенно заданных дискретными не аналитическими функциями, при наличии сложных ограничений на переменные, применяют принцип максимизации в условиях динамического программирования. Методы динамического программирования были разработаны в 1956-1957 годах российским математиком Л.С. Понтрягиным и американским Р. Беллманом, на основе классических методов вариационного исчисления Эйлера и Лагранжа.

Динамическое программирование является методом решения задач оптимального принятия решений в дискретных условиях для замкнутых областей. Оно отличается как от классических оптимизационных методов и методов принятия решений тем, что рассматриваемые задачи являются многоуровневыми, многошаговыми, способными изменяться с течением времени, что и повлияло на название метода, который получил название «динамический», то есть меняющийся по времени.

Динамическое программирование — это математический метод поиска оптимального управления, специально приспособленный к многошаговым процессам.

Среди задач динамического программирования можно выделить следующие:

* распределение ресурсов, например, ограниченного объема капиталовложений между возможными направлениями их использований по объему и времени;
* разработка правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения и размер пополняемого запаса;
* выбор транспортных маршрутов или технологических способов изготовления изделий;
* разработка принципов календарного планирования производства и многие другие.

Рассмотрим один из таких процессов. Пусть планируется деятельность группы предприятий на *N* лет. Здесь шагом является один год. В начале 1-го года на развитие предприятий выделяются средства, которые должны быть как-то распределены между этими предприятиями. В процессе их функционирования выделенные средства частично расходуются. Каждое предприятие за год приносит некоторый доход, зависящий от вложенных средств. В начале года имеющиеся средства могут перераспределяться между предприятиями: каждому из них выделяется какая-то доля средств.

Ставится вопрос: как в начале каждого года распределять имеющиеся средства между предприятиями, чтобы суммарный доход от всех предприятий за *N* лет был максимальным?

Перед нами типичная задача динамического программирования, в которой рассматривается управляемый процесс – функционирование группы предприятий. Управление процессом состоит в распределении (и перераспределении) средств. Управляющим воздействием (УВ) является выделение каких-то средств каждому из предприятий в начале года.

Задача оптимального вложения денежных средств в различные проекты и мероприятия является одной из основных задач динамического программирования в финансово-инвестиционной сфере. По этой причине рассмотрим методику ее решения с использованием вычислительной техники, и, как и предыдущие задачи данного пособия, с использованием MS Excel. Рассмотрим методику решения данной задачи на примере. Но сначала приведем основные положения, позволяющие свести задачу к модели задачи линейного программирования.

Пусть некоторый инвестор имеет *n* пакетов денежных средств, которые он хочет вложить в том или ином количестве в один или несколько из *k* проектов. Пусть все денежные пакеты равны, причем инвестировать пакеты в проекты можно кратно одному. Также допустим, что в один проект можно инвестировать не более *m* пакетов. В результате инвестирования каждый проект, получивший средства, через определенный период времени принесет инвестору прибыль, которая зависит от числа вложенных в проект финансовых пакетов.

Пусть *aij* – прибыль, полученная инвестором от *j*-го проекта, в случае, что в него было вложено *i* финансовых пакетов (*i*=0,1,…,*m*; *j*=1,2,…,*k*). Назовем *А*= *aij –*матрицей прибылей, причем ее элементы не обязательно должны быть целыми. Очевидно, что *a0j* =0. Необходимо так распределить финансовые пакеты по проектам, чтобы суммарная прибыль (равная сумме прибылей от каждого проекта) была максимальна.

Для решения задачи методами линейного программирования введем переменные



*i*=1,2,…,*m*; *j*=1,2,…,*k.*

Для построения целевой функции введем матрицу эффективности , *i*=1,2,…,*m*; *j*=1,2,…,*k,*  которая имеет смысл дополнительной прибыли, полученной от вложения в *j*-й проект одного дополнительного инвестиционного пакета. Для контроля той ситуации, что если в *j*-й проект вложили *h* пакетов (то есть *xhj*=1), то и все переменные, для которых первый индекс меньше *h*, должны быть единицами:  (условие связности вложений), введем еще одну матрицу связности , *i*=2,3,…,*m*; *j*=1,2,…,*k.* Тогда для выполнения указанного условия все элементы матрицы  должны быть неположительными.

Строим модель задачи. Целевая функция будет иметь вид:

.

Ограничения связаны с тем, что все переменные *xij* должны быть либо 0, либо 1:

,

количество инвестированных финансовых пакетов не должно превышать имеющееся: ,

 и не нарушалось условие связности вложений: .

Целевая функция с ограничениями составляет задачу линейного программирования, решение которой даст оптимальное решение. Следует отметить, что таких решений может быть несколько и это нужно учесть при его нахождении. Найдя переменные при оптимальном решении, инвестиции , дающие наибольшую прибыль, будут равны  .