Моделирование в социально-экономических системах
Лабораторный практикум

Тема 1. Методы решения ЗЛП

Задачи оптимального программирования и, как их частный случай, задачи линейного программирования (ЗЛП), являются мощным математическим аппаратом решения многих экономических задач, в частности, задач принятия управленческих решений. Разработано много методов аналитического решения ЗЛП, например, геометрический или симплекс-метод. Однако, аналитическое решение требует большого количества алгебраических вычислений, что может привести к вычислительным ошибкам, а также требует больших затрат времени. Поэтому, в связи с интенсивным развитием в последние десятилетия информационных технологий, целесообразно решать ЗЛП на ЭВМ. Для этих целей разработано множество программных средств, среди которых наиболее простой и доступной является надстройка «Поиск решения» электронных таблиц EXCEL.

Рассмотрим способ решения ЗЛП на следующем примере.

ПРИМЕР 1. Решить на ЭВМ задачу линейного программирования, которая имеет вид:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \le 17; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 15; \\ 3x_2 - 4x_3 \ge 5; \end{cases}$$

$$x_{1,2,3} \ge 0; \quad x_1 - \textit{целое}.$$

Предварительно необходимо в электронной таблице подготовить исходные данные. Для этого, запустив MS Excel, выделим первую строчку под переменные. В ячейке A1 введем подпись «Переменные» и назначим под переменные x_1, x_2, x_3 ячейки B1, C1 и D1. Введем в эти ячейки любые произвольные числа, например единицы. Во второй строке определим целевую функцию. В ячейке A2 введем подпись «Целевая» и в соседней B2 введем формулу, зависящую от переменных «=2*B1+3*C1-D1» (для ввода ссылок на ячейку достаточно щелкнуть мышью по ней, кавычки не вводить). Нажав Enter, получим результат 4. В третью строку вводим левые части основной системы ограничений. В A3 вводим подпись «Ограничения» и в B3 ставим курсор и вводим в виде формулы левую часть ограничения $3x_1 + x_2 - x_3 \le 17$: «=3*B1+C1-D1». Аналогично, в ячейки C3 и D3 вводим левые части других ограничений, соответственно: «=2*B1+4*C1+D1» и «=3*C1-4*D1». Подготовительный этап закончен.

Вызываем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ, которая решает оптимизационные задачи. Для этого в меню «Данные» выбираем «Поиск решений». Если в меню данные этого пункта нет, то его нужно подключить. Для этого нажимаем левой кнопкой мыши по круглой кнопке “Office” (в других вессиях «Файл) в верхнем левом углу экрана, внизу выбираем «Параметры Excel», слева выбираем НАДСТРОЙКИ, нажимаем кнопку «Перейти» внизу окна и в открывшемся окне проверяем наличие флажка напротив «Поиск решения», «ОК». В меню ДАННЫЕ выбираем ПОИСК РЕШЕНИЯ.

Откроется окно поиска решения. В нем нужно поставить окно в поле «Оптимизировать целевую функцию» и далее щелкнуть мышью по ячейке B2 с целевой функцией. В окне появится $B$2. Далее нужно проверить, что флажок ниже поля стоит напротив надписи «До максимума». После ставим курсор в поле «Изменяя ячейки переменных» и обводим ячейки с переменными B1, C1 и D1. В поле появиться $B$1:$D$1. В нижней части окна находится поле «В соответствии с ограничениями». Для того, чтобы ввести ограничения, наживают кнопку «Добавить», откроется окно «Добавление ограничения». В левом поле «Ссылка на ячейку» вводят ссылку на левую часть первого ограничения – ячейку B3, в центральном окне определяем знак ≤ и в правом «Ограничения» набираем правую часть ограничения – число 17. Нажимаем «ОК», видим, что ограничение появилось в окне. Нажимаем вновь «Добавить», вводим «C3» «≤» и «15». Вновь нажимаем «Добавить», вводим «D3» «≥» и «5». Для ввода дополнительных ограничений $x_{1,2,3} \ge 0; \quad x_1 - \textit{целое}.$, вновь нажимаем «Добавить», ставим курсор в левое поле и обводим ячейки B1, C1 и D1 (результат $B$1:$D$1) в среднем окне ставим «≥» и в правом число 0. Снова «Добавить» в левое поле вводим B1, а в центральном выбираем «цел.». В правом окне появится «целое». Все ограничения введены. Для запуска вычислений нажимаем кнопку «Найти решение». Появляется надпись, что решение найдено. Выбираем «Сохранить найденное решение» и «ОК» видим результат: в ячейках B1, C1 и D1 видны значения переменных x_1, x_2, x_3, соответствующие оптимальному решению: 4; 1,75 и 0. В ячейки B2 – значение целевой функции: 13,25.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим решение задачи определения оптимального ассортимента продукции. Фирма производит и продает два типа товаров. Фирма получает прибыль в размере 12 тыс.р. от производства и продажи каждой единицы товара 1 и в размере 4 тыс.р. от производства и продажи каждой единицы товара 2. Фирма состоит из трех подразделений. Затраты труда (чел.-дни) на производство этих товаров в каждом из подразделений указаны в таблице.

Подразделение	Трудозатраты, чел- дней на 1 шт.	
	товар 1	товар 2
1	1	2
2	1	3
3	2	3

Руководство рассчитало, что в следующем месяце фирма будет располагать следующими возможностями обеспечения производства трудозатратами: 800 чел-дней в подразделении 1, 600 — в подразделении 2 и 2000 — в подразделении 3. Сколько единиц товара 1 и товара 2 нужно выпустить, чтобы суммарная полученная прибыль была максимальна?

Для решения задачи составляем математическую модель. Пусть x_1 - количество товара 1, x_2 - количество товара 2. а Целевая функция и ограничения имеют вид:

$$12x_1 + 4x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 800; \\ x_1 + 3x_2 \le 600; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2000; \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0; \quad x_{1,2} - целое.$$

Задание. *Решить самостоятельно поставленную ЗЛП на ЭВМ и проанализировать результаты.*

Рассмотрим теперь задачу составления смеси.

ПРИМЕР 3. Приведем решение задачи о раскрое (минимизации отходов). Продукция бумажной фирмы выпускается в виде бумажных рулонов стандартной ширины - по 2 метра. По специальным заказам потребителей фирма поставляет рулоны и других размеров, для чего производится разрезание стандартных рулонов. Типичные заказы на рулоны нестандартных размеров приведены в табл.

Заказ	Ширина рулона (м)	Количество рулонов
1	0,5	150
2	0,7	200
3	0,9	300

Требуется найти такие сочетания различных вариантов разрезания стандартных рулонов, чтобы поступившие заказы полностью удовлетворить с минимальными потерями (отходами). Рассмотрим все возможные варианты раскроя стандартного рулона, соответствующие данные приведем в табл.

Ширина рулона(м)	Варианты раскроя рулона						Минимальное количество рулонов
	1	2	3	4	5	6	
0,5	0	2	2	4	1	0	150
0,7	1	1	0	0	2	0	200
0,9	1	0	1	0	0	2	300
Отходы в м	0,4	0,3	0,1	0	0,1	0,2	-

Определим переменные: X_j - количество стандартных рулонов, разрезаемых по варианту j, j =1, 2, 3,4,5,6.

Ограничения непосредственно связаны с требованием обеспечить изготовление требуемого количества нестандартных рулонов. Используя данные табл., получим:

$2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 = 150$ - количество рулонов шириной 0,5 м,

$X_1 + X_2 + 2X_5 = 200$ - количество рулонов шириной 0,7 м,

$X_1 + X_3 + 2X_6 = 300$ - количество рулонов шириной 0,9 м.

Выражение для суммарной величины потерь бумаги (отходы в м) имеет вид:

$0{,}4X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}1X_3 + 0{,}1X_5 + 0{,}2X_6$.

Таким образом, математическая модель в общем виде имеет вид $\min f(x) = 0{,}4X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}1X_3 + 0{,}1X_5 + 0{,}2X_6$. при ограничениях:

$2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5 = 150$

$X_1 + X_2 + 2X_5 = 200$

$X_1 + X_3 + 2X_6 = 300$; $X_j \ge 0$.

Задание. *Решить самостоятельно поставленную ЗЛП на ЭВМ и проанализировать результаты.*

Задания для самостоятельного решения

№ 1. Дана задача линейного программирования.

$$F(x, y) = x - 2y \longrightarrow \min$$
$$\begin{cases} 2x + 3y \le 6; \\ x - y \le 1; \\ x \ge 1; \\ x, y \ge 0. \end{cases}$$

Необходимо решить ее с применением пакета MS Excel

№ 2. Решить задачу линейного программирования, сформулированную на лекции.

№ 3. Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек чистую шерсть, силон и нитрон, запасы которых составляют, соответственно, 800, 400 и 300 кг. Остальные данные по затратам пряжи на партию из 10 изделий – в таблице.

Вид сырья в пряже	Затраты пряжи на 10 шт.	
	Свитер	Кофточка
Шерсть	4	2
Силон	2	I
Нитрон	1	1
Прибыль, руб.	6	5

Определить план выпуска изделий, который даст максимальную прибыль.

№ 4. Решить задачу о раскрое. На предприятии имеются бревна длиной 6,5 м, которые необходимо разрезать на заготовки длиной 2,1; 2,3 и 1,4 м в количестве 600, 720 и 900 соответственно. Необходимо составить оптимальный план раскройки материала, который обеспечивает минимальные отходы.

Указание. Варианты раскроя представлены в таблице:

Длина заготовки	Варианты раскроя							Количество заготовок
	1	2	3	4	5	6	7	
2,1	3	2	2	1	1	0	0	600
2,3	0	1	0	1	0	2	1	720
1,4	0	0	1	1	3	1	3	900
Остаток, м	0,2	0	0,9	0,7	0,2	0,5	0	

Тема 2. Решение транспортной задачи

Приведем решение транспортной задачи на примере.

Пример 1. Компания «Стройгранит» производит добычу строительной щебенки и имеет на территории региона три карьера. Запасы щебенки на карьерах соответственно равны 800, 900 и 600 тыс. тонн. Четыре строительные организации, проводящие строительные работы на разных объектах этого же региона дали заказ на поставку соответственно 300, 600, 650 и 500 тыс. тонн щебенки. Стоимость перевозки 1 тыс. тонн щебенки с каждого карьера на каждый объект приведены в таблице:

Карьер	*Строительный объект*			
	1	*2*	*3*	*4*
1	8	4	1	7
2	3	1	7	3
3	13	5	11	8

Необходимо составить такой план перевозки (количество щебенки, перевозимой с каждого карьера на каждый строительный объект), чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальными.

Данная транспортная задача является открытой, так как запасы поставщиков 800+900+600=2300 больше спроса потребителей 300+600+650+500=2050. Математическая модель ЗЛП в данном случае имеет вид:

x_{ij}; $i=1,2,3$; $j=1,2,3,4$ - количество щебенки, перевозимой с i – го карьера на j – й объект. Тогда целевая функция равна

$$8x_{11}+4x_{12}+x_{13}+7x_{14}+3x_{21}+1\cdot x_{22}+7x_{23}+3x_{24}+$$
$$+13\cdot x_{31}+5x_{32}+11x_{33}+8x_{34}\to \min.$$

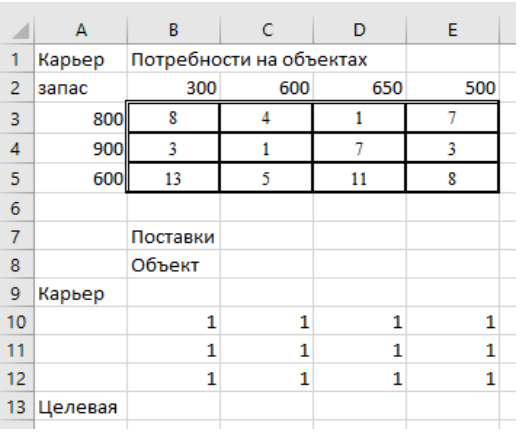
Ограничения имеют вид в соответствием рисунка на следующей странице

Открываем лист Excel. Задаем исходные данные, из таблицы в диапазон A1-E5, под переменные выделяем область B10-E12, как это указано на рисунке слева.

Вводим целевую функцию в B13 в виде формулы =СУММПРОИЗВ(B3:E5;B10:E12). Левые части первых трех ограничений вводим в диапазон A10-A12. Для этого вводим в A10 формулу =СУММ(B10:E10) и автозаполняем ее на A10-A12. Следующие 4 ограничения вводим в B9-E9. Вводим в B9 формулу =СУММ(B10:B12) и автозаполняем на B9-E9.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 800; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 900; \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 600; \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=300; \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=600; \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=650; \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=500; \end{cases}$$

$$x_{ij}\ge 0.$$



	A	B	C	D	E
1	Карьер	Потребности на объектах			
2	запас	300	600	650	500
3	800	8	4	1	7
4	900	3	1	7	3
5	600	13	5	11	8
6					
7		Поставки			
8		Объект			
9	Карьер				
10		1	1	1	1
11		1	1	1	1
12		1	1	1	1
13	Целевая				

Запускаем надстройку «Поиск решений» (в меню «Данные»). Целевая функция в ячейке B13, направление оптимизации – минимум, изменяемые переменные в ячейках B10-E12, ограничения:

A10≤A3, A11≤A4, A12≤A5, B9=B2, C9=C2, D9=D2, E9=E2, B10-E12≥0.

После выполнения работы надстройки, получаем в ячейках B10-B12 распределение поставок между карьерами и объектами в соответствии с оптимальным планом.

Далее, рассмотрим решение открытой транспортной задачи при условии, что имеются данные о стоимости хранения нереализованного груза или издержках потребителей ввиду недополучения товара.

Пример 2. Рассмотрим предыдущую задачу, но при условии, что оставшуюся на карьерах щебенку нужно хранить некоторое время. Хранение требует затрат. Предположим, что затраты на хранение щебенки на первом карьере составят 3 д.е., на втором и третьем 2 и 9 д.е. Чтобы учитывать этот фактор, необходимо ввести фиктивного потребителя (аналог строительного объекта), для которого нужно заложить затраты не перевозки, а хранения запасов. Решаем закрытую транспортную задачу вида:

Карьер	*Строительный объект*				
	1	*2*	*3*	*4*	*Фиктивный 5*
1	8	4	1	7	3
2	3	1	7	3	2
3	13	5	11	8	9

Задание: Сформировать транспортную задачу и решить ее в Excel.

Указание: при решении используйте новый лист и новое решение, не копируйте предыдущую задачу, запутаетесь. При указании спроса щебенки в новом 5-м столбце, указываем разницу между запасами щебенки и ее потребностями, т. е. 2300-2050=250. При формировании ограничений в «Поиск решений» все ограничения,

кроме последнего, где переменные неотрицательные, будут равенствами (задача закрытая)! Обратите внимание, что распределение поставок изменится по сравнению с предыдущей задачей.

Пример 3. С четырех складов необходимо перевести определенный товар в 5 магазинов. Стоимость перевозки товара с каждого склада в каждый магазин, а также запасы товара на складах и потребности товара в магазинах указаны в транспортной таблице.

Склад и его запасы		Магазины и их спрос				
		Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4	Магазин 5
		2200	1600	2000	1950	1550
1	3600	4	3	2	3	4
2	1900	1	1	1	2	9
3	2150	9	8	2	2	4
4	1650	2	5	2	7	6

Необходимо составить такой план перевозки товара, чтобы суммарные транспортные затраты были минимальными.

Задание: Составить план перевозки товара, с минимальными затратами.

Указание. Проверить, является ли транспортная задача закрытой и если это так, сделать все ограничения равенствами.

Пример 4. Рассмотрим теперь пример транспортной задачи, которая к транспорту не имеет никакого отношения. На предприятии необходимо выпустить детали 6 видов в заданном количестве. Имеются 5 рабочих, которые имеют резервы времени в указанный для выпуска период, каждый из которых может выпускать деталь каждого вида, но имеет разный процент брака (в %) для каждой детали. Этот процент указан в транспортной таблице ниже, где представлены также ресурсы времени каждого рабочего и потребности в деталях каждого вида.

Рабочий и его возможности		**Детали и их количество**					
		Деталь 1	**Деталь 2**	**Деталь 3**	**Деталь 4**	**Деталь 5**	**Деталь 6**
		70	**90**	**105**	**110**	**60**	**125**
1	**80**	2,3	6,0	9,5	9,3	10,0	2,7
2	**120**	2,3	5,1	8,4	1,3	0,4	0,9
3	**100**	0,3	9,3	4,5	7,9	6,3	5,2
4	**90**	1,2	0,1	1,5	3,3	0,6	3,3
5	**170**	5,8	5,0	4,6	7,0	3,7	6,1

Необходимо составить такой план выпуска каждой детали каждым рабочим, так, чтобы суммарный процент брака был минимальным.

Задание: Составить план выпуска деталей, с минимальным суммарным браком.

Указание. Учесть, что число деталей должно быть целым. Проверить, является ли транспортная задача закрытой и если это так, сделать все ограничения равенствами.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1

Решить задачу, поставленную на лекции.

Задание 2

Решить транспортную задачу

Предложения поставщиков	Потребители и их спрос			
	250	300	100	250
300	2	6	2	3
400	5	4	6	4
200	1	8	7	2

Задание 3

Пусть имеется три зернохранилища и четыре мукомольных комбината, на которые необходимо развести зерно. Транспортные расходы в тысячах рублей за тонну груза представлены в первых четырех столбцах таблицы, представленной ниже, запасы зерна в каждом хранилище в тоннах в пятом столбце, потребности зерна на комбинатах - в шестом столбце. Необходимо представить оптимальный план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

Данные транспортной таблицы	Транспортные расходы				Запасы
	5	8	3	10	40
	10	7	9	6	120
	7	3	6	4	600
Потребности	400	150	100	110	

Тема 3. Задача о назначениях

При принятии управленческих решений часто приходится сталкиваться с задачей распределения ресурсов по исполнителям, которая называется задачей о назначениях. Эту задачу, как и задачу принятия решений в условиях конфликта, можно свести к задаче линейного программирования. Рассмотрим ее решение на примере.

ПРИМЕР. Цеху металлообработки нужно выполнить срочный заказ на производство деталей. Каждая деталь обрабатывается на 4-х станках С1, С2, С3 и С4. На каждом станке может работать любой из четырех рабочих Р1, Р2, Р3, Р4, однако, каждый из них имеет на каждом станке различный процент брака. Из документации ОТК имеются данные о проценте брака каждого рабочего на каждом станке:

Рабочие	Станки			
	С1	С2	С3	С4
Р1	2,3	1,9	2,2	2,7
Р2	1,8	2,2	2,0	1,8
Р3	2,5	2,0	2,2	3,0
Р4	2,0	2,4	2,4	2,8

Необходимо так распределить рабочих по станкам, чтобы суммарный процент брака (который равен сумме процентов брака всех 4-х рабочих) был минимален. Чему равен этот процент?

Обозначим за $x_{ij};\ i=1,2,3,4;\ j=1,2,3,4$ - переменные, которые принимают значения 1, если *i*-й рабочий работает на *j*-м станке. Если данное условие не выполняется, то $x_{ij}=0$. Целевая функция есть:

$$2{,}3x_{11}+1{,}9x_{12}+2{,}2x_{13}+2{,}7x_{14}+1{,}8x_{21}+2{,}2x_{22}+2x_{23}+1{,}8x_{24}+$$
$$+2{,}5x_{31}+2x_{32}+2{,}2x_{33}+3x_{34}+2x_{41}+2{,}4x_{42}+2{,}4x_{43}+2{,}8x_{44}\to\min.$$

Вводим ограничения. Каждый рабочий может работать только на одном станке, то есть

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1; \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1; \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1. \end{cases}$$

Кроме этого, каждый станок обслуживает только один рабочий:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1; \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1; \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1; \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1. \end{cases}$$

Кроме того, все переменные должны быть целыми и неотрицательными: $x_{ij}\ge 0,\ x_{ij}-целые$.

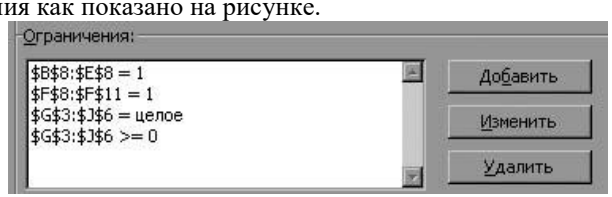
Открываем электронную таблицу EXCEL. Вводим в диапазон B3-E6 проценты по браку, ячейки G3-J6 выделяем под переменные и вводим в них произвольные числа, например единицы, задаем подписи как показано на рисунке.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Рабочие		Станки							
2		C1	C2	C3	C4		Переменные			
3	P1	2,3	1,9	2,2	2,7		1	1	1	1
4	P2	1,8	2,2	2	1,8		1	1	1	1
5	P3	2,5	2	2,2	3		1	1	1	1
6	P4	2	2,4	2,4	2,8		1	1	1	1
7	Целевая									
8	Ограничения									

Целевая функция равна сумме произведений данных из диапазона B3-E6 умноженных на переменные из диапазона G3-J6. Для ее вычисления ставим курсор в ячейку B7, вызываем мастер функций кнопкой f_x и выбираем функцию СУММПРОИЗВ из категории «Статистические». В полях «Массив 1» обводим ячейки B3-E6, делая на них ссылку, а в «Массив 2» обводим G3-J6, нажимаем «ОК».

Вводим левые части ограничений. Ставим курсор в B8 и вводим туда функцию **«=G3+G4+G5+G6»**. Автозаполняем на B8, C8, D8 и E8. Ставим курсор на F8 и вводим формулу: **«=G3+H3+I3+J3»** и автозаполняем ее на F9, F10, F11.

Вызываем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ. Для этого заходим в меню «Файл» и выбираем подменю «Параметры». В открывшемся окне «Параметры Excel» выбираем пункт «Надстройки». В нижней части экрана в поле «Управление» нажимаем на кнопку «Перейти». В окне надстроек проверяем, стоит ли флажок напротив подписи «Поиск решения», если нет, то ставим его. Нажимаем «ОК». Заходим в меню «Данные», выбираем «Поиск решений» (справа), открывается окно надстройки. В поле «Установить целевую ячейку» даем ссылку на B7. Ставим точку на переключателе «Минимальному значению». В поле «Изменяя ячейки» даем ссылку на G3-J6. Нажимаем «Добавить» и вызываем окно добавление ограничения. Вводим 4 ограничения как показано на рисунке.



Нажимаем «Выполнить». Получаем результат, таблица переменных состоит из единиц и нулей, по единицам определяем, что 1-й рабочий должен работать на втором станке, 2-й на 4-м, 3-й на 3-м, 4-й на 1-м. Суммарный процент брака (целевая функция) будет равен 7,9.

Задачи для самостоятельного решения.

ЗАДАНИЕ 1. На предприятии имеется 6 автомобилей разных моделей. Необходимо в разные районы области перевести 5 грузов. Затраты по перевозке каждого груза каждым автомобилем различны и приведены в таблице:

Авто\Груз	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
А1	37	17	52	73	72
А2	11	39	70	20	27
А3	12	21	25	11	30
А4	49	35	36	35	74
А5	40	31	78	66	79
А6	77	14	59	67	78

Выбрать автомобиль для каждого вида груза так, чтобы затраты на перевозку были минимальными. Определить эти затраты.

Обратите внимание, что автомобилей больше, чем грузов, то есть один автомобиль окажется невостребованным. По этой причине во второй группе

ограничений будет не равенство их нулю, а знак «≤», то есть ограничения будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}=1; \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}=1; \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}+x_{63}=1; \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}=1; \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}+x_{65}=1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}\le 1; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}\le 1; \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}\le 1; \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}\le 1; \\ x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}\le 1; \\ x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64}+x_{65}\le 1. \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 2.

На спортивных соревнованиях по бадминтону тренеру необходимо расставить 8 своих игроков против 8 игроков соперника. Имеются статистические данные игр соперников друг с другом, равные проценту побед из 10-20 матчей, проведенных между каждой парой. Подберите такую расстановку игроков, чтобы суммарный процент побед был бы наибольшим (при решении знак процента не указывать).

Игрок	**Соперник**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	58%	40%	88%	30%	6%	19%	95%	8%
2	8%	73%	18%	94%	31%	90%	83%	21%
3	31%	29%	67%	50%	90%	36%	8%	80%
4	55%	88%	63%	10%	36%	100%	94%	60%
5	25%	21%	32%	50%	60%	92%	64%	16%
6	28%	54%	74%	100%	27%	43%	64%	58%
7	70%	50%	40%	27%	31%	53%	80%	20%
8	50%	11%	94%	100%	8%	36%	38%	73%

ЗАДАНИЕ 3. Три учебные группы экономического факультета вуза собираются посетить во время практики 6 предприятий и НИИ. Каждая учебная группа может посетить две организации. Путем опроса студентов выявлены предпочтения каждой группы для 10 организаций (1 означает «наиболее предпочтительна», а 10 — «наименее предпочтительна»). Предпочтения каждой из пяти учебных групп показаны в таблице (П-1, П-2, П-3 — промышленные предприятия; НИИ-1, НИИ-2, НИИ-3 — научно-исследовательские институты):

Группа / Организация	1	2	3
П-1	3	2	1
П-2	2	5	3
П-3	1	1	2
НИИ-1	7	4	8
НИИ-2	10	8	6
НИИ-3	5	6	7

Необходимо:

1. Определите, какие две организации должна посетить каждая группа, чтобы в максимальной степени были учтены предпочтения всех студентов.

2. Деканат внес предложение, чтобы каждая группа посетила одно предприятие и один НИИ. Укажите теперь такой вариант распределения, чтобы каждой группе досталось по одному промышленному предприятию и одному НИИ. Чему равна сумма оценочных баллов в этом случае?

Указания. В таблице задачи о назначениях указаны предпочтения каждой группы, при этом каждая группа представлена дважды, так как может посетить две организации:

Группа / Организация	1	2	3	1	2	3
П-1	3	2	1	3	2	1
П-2	2	5	3	2	5	3
П-3	1	1	2	1	1	2
НИИ-1	7	4	8	7	4	8
НИИ-2	10	8	6	10	8	6
НИИ-3	.5	6	7	5	6	7

Если учесть предложение деканата, то надо решить две задачи о назначениях: сначала распределить группы по предприятиям, затем — по НИИ. Эти две задачи можно представить в виде одной оптимизационной задачи, имеющей следующую таблицу (М— большое число, например 11):

Группа / Организация	1	2	3	1	2	3
П-1	3	2	1	M	M	M
П-2	2	5	3	M	M	M
П-3	1	1	2	M	M	M
НИИ-1	M	M	M	7	4	8
НИИ-2	M	M	M	10	8	6
НИИ-3	M	M	M	5	6	7

Тема 4. Задача коммивояжера

Пусть имеется n городов, между каждой парой которых с номерами i и j известно расстояние (или время перемещения, стоимость проезда), которое обозначим C_{ij}. Необходимо так спланировать посещение всех городов по одному разу, начиная с заданного, чтобы суммарное расстояние (время, стоимость) было минимальным.

Введем переменные x_{ij}, которые могут принимать значения равные либо 0, либо 1 и имеющие смысл:

$$x_{ij}=\begin{cases} 1, \textit{ если будет переезд из города } i \textit{ в город } j; \\ 0, \textit{ если иначе.} \end{cases}$$

Для решения задачи нужно решать ЗЛП вида: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to \min$ с ограничениями $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$; $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, $i, j = 1,\ldots, n$, и условием связности маршрута $u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \le n-2$, где u_i – некоторые дополнительные переменные, $i \ne j$, $i, j = 2,\ldots, n$. Кроме того переменные x_{ij} должны быть двоичными, то есть 0 или 1 и диагональные элементы, соответствующие переезду из города в этот же город, должны быть нулевыми: $x_{ii} = 0$.

Рассмотрим решение задачи на примере.

Пример. Менеджеру компании нужно объехать 6 магазинов, время переезда между которыми (в минутах) представлено в таблице:

Магазин	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	34	27	53	38	29
2	43	0	33	51	49	32
3	35	27	0	26	29	31
4	38	41	45	0	37	51
5	34	29	46	33	0	39
6	25	27	30	29	32	0

Нужно составить путь объезда всех магазинов, начинающийся с первого магазина, так, чтобы суммарное время на переезды было минимальным. Вернуться нужно в первый магазин.

Ввиду того, что время переезда между магазинами туда и обратно разное, имеем несимметричную задачу коммивояжёра.

Под основные переменные выделяем ячейки B3-G8, под матрицу времени ячейки B12-G17, под дополнительные переменные $u_2 \ldots u_6$ ячейки C19-G19. Вводим в ячейки с переменными произвольные числа, например, единицы. Под условия, связанные с этими переменными выделяем диапазон C21-G25. Целевая функция будет в ячейке B26. Подготавливаем лист Excel как показано на рисунке.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Основные переменные**							
2	Магазин	1	2	3	4	5	6	Огранич.
3	1	1	1	1	1	1	1	
4	2	1	1	1	1	1	1	
5	3	1	1	1	1	1	1	
6	4	1	1	1	1	1	1	
7	5	1	1	1	1	1	1	
8	6	1	1	1	1	1	1	
9	Огранич.							
10	**Матрица времени**							
11	Магазин	1	2	3	4	5	6	
12	1	0	34	27	53	38	29	
13	2	43	0	33	51	49	32	
14	3	35	27	0	26	29	31	
15	4	38	41	45	0	37	51	
16	5	34	29	46	33	0	39	
17	6	25	27	30	29	32	0	
18	**Дополнительные переменные u и ограничения**							
19	Переменные u		1	1	1	1	1	
20	Ограничения по u	u2		u3		u4		u5
21		u2						
22		u3						
23		u4						
24		u5						
25		u6						
26	**Целевая**							

Вводим ограничения. В ячейку H3 вводим формулу **=СУММ(B3:G3)** и с помощью автозаполнения распространяем ее на H3-H8. В ячейку B9 вводим формулу **=СУММ(B3:B8)** и с помощью автозаполнения распространяем ее на B9-G9.

Вводим ограничения, связанные со связностью маршрута. Для n=6 магазинов это условие будет вида $u_i - u_j + 5x_{ij} \le 4$. В C21 вводим **=$C$19-C$19+5*C4**, автозаполнением распространяем ее на C21-G21. Аналогично, в C22 вводим **=$D$19-C$19+5*C5**, автозаполнением распространяем ее на C22-G22, в C23 вводим **=$E$19-C$19+5*C6**, автозаполнением распространяем ее на C23-G23, в C24 вводим **=$F$19-C$19+5*C7**, автозаполнением распространяем ее на C24-G24, в C25 вводим **=$G$19-C$19+5*C8**, автозаполнением распространяем ее на C25-G25.

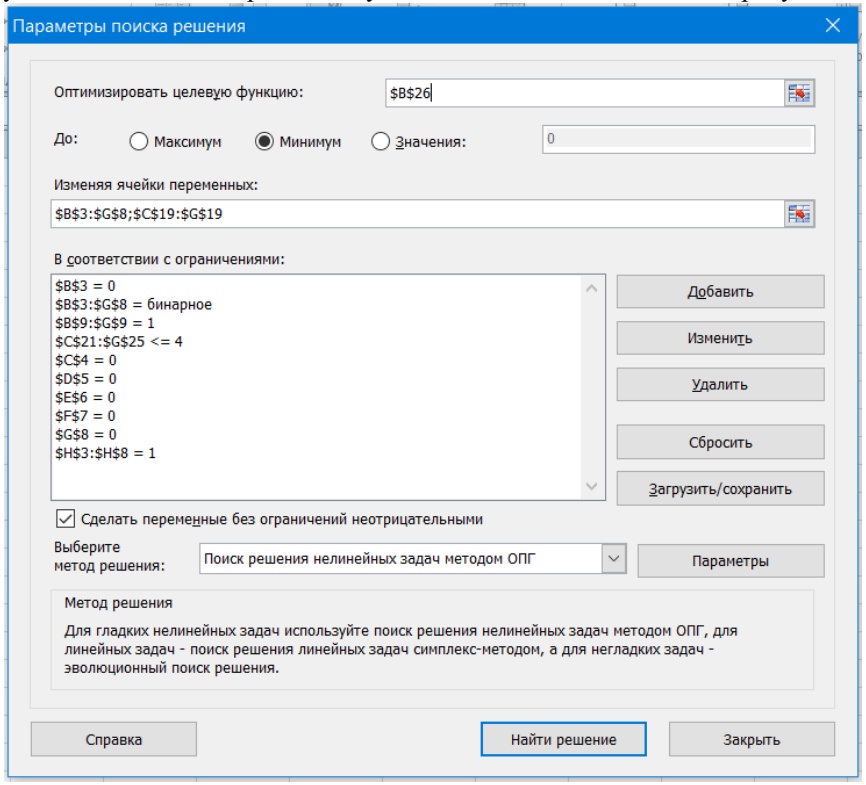
Вводим целевую функцию. В ячейку B26 вводим формулу **=СУММПРОИЗВ(B3:G8;B12:G17)**.

Вызываем надстройку «Поиск решений» в меню «Данные».

В поле «Оптимизировать целевую функцию» даем ссылку на B26, ставим направление оптимизации на минимум, в поле «Изменяя ячейки переменных» даем ссылки на основные ограничения в ячейках B3-G8 и на дополнительные в ячейках C19-G19. Для этого обводим диапазон B3-G8 и, удерживая клавишу Ctrl, обводим диапазон C19-G19. Вводим ограничения в соответствием со схемой:

Ссылка на ячейки	Знак	Ограничение	Ссылка на ячейки	Знак	Ограничение
B9:G9	=	1	C4	=	0
H3:H8	=	1	D5	=	0
B3:G8	бин	бинарное	E6	=	0
C21:G25	<=	4	F7	=	0
B3	=	0	G8	=	0

В результате, окно поиска решения будет заполнено в соответствии с рисунком.



Запускаем «Найти решения» и видим результат:

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Основные переменные**						
2	Магазин	1	2	3	4	5	6
3	1	0	0	1	0	0	0
4	2	0	0	0	0	0	1
5	3	0	0	0	1	0	0
6	4	0	0	0	0	1	0
7	5	0	1	0	0	0	0
8	6	1	0	0	0	0	0

В результате, из 1 магазина отправляемся в 3, из 3 в 4, из 4 в 5, из 5 во 2, из 2 в 6, из 6 в 1. Путь имеет вид 1-3-4-5-2-6-1, время в пути (целевая функция) 176 минут.

Задание 1. Имеется 5 городов, расстояния C_{ij} между которыми приведены в таблице.

Номер города	1	2	3	4	5
1	0	9	8	4	10
2	6	0	4	5	7
3	5	3	0	6	2
4	1	7	2	0	8
5	2	4	5	2	0

Коммивояжер, выезжая из города 1, должен посетить все города, побывав в каждом из них только по одному разу и вернуться в исходный город. Необходимо определить такой маршрут объезда городов, при котором длина маршрута будет минимальной.

Задание 2. Стоимость проезда между 7 городами представлена в таблице.

Город	**Город 1**	**Город 2**	**Город 3**	**Город 4**	**Город 5**	**Город 6**	**Город 7**
Город 1	0	170	160	450	340	890	770
Город 2	640	0	280	430	670	810	400
Город 3	750	180	0	130	120	570	730
Город 4	450	310	220	0	610	990	190
Город 5	680	910	230	680	0	850	240
Город 6	760	120	620	430	480	0	870
Город 7	350	570	100	130	430	840	0

Составить маршрут объезда всех городов, начиная и заканчивая во втором, с наименьшей стоимостью.

Задание 3. Время перемещения между 9 городами (часы) представлено в таблице. Составить маршрут с наименьшим временем посещения всех городов по одному разу при выезде из первого города и возвращения в него.

Города	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	18	5	2	12	5	9	8	7
2	18	0	15	11	9	15	6	1	17
3	5	15	0	8	4	11	10	18	14
4	2	11	8	0	5	7	12	9	15
5	12	9	4	5	0	5	9	12	8
6	5	15	11	7	5	0	15	3	16
7	9	6	10	12	9	15	0	5	14
8	8	1	18	9	12	3	5	0	6
9	7	17	14	15	8	16	14	6	0

Составить маршрут объезда всех городов, начиная и заканчивая во втором, с наименьшей стоимостью.

Тема 5. Задача оптимального распределения ресурсов

Задача оптимального вложения ресурсов в различные проекты и мероприятия является одной из важнейших задач оптимального программирования в финансово-инвестиционной сфере.

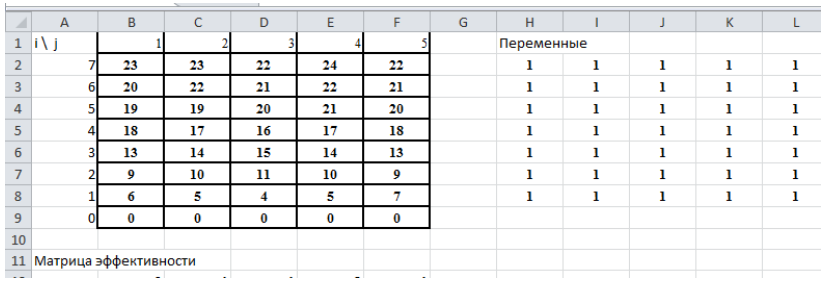
ПРИМЕР. Инвестору предложили вложить имеющиеся средства в количестве 12 д. е. в один или несколько из 5 имеющихся проектов, но не более 7 д.е. в один проект. Матрица прибылей и построенная по ней матрица эффективности имеют вид (для наглядности строки таблица нумерует снизу вверх, а не сверху вниз, как принято для матриц):

Матрица прибылей А

i \ j	Проект				
	1	2	3	4	5
7	**23**	**23**	**22**	**24**	**22**
6	**20**	**22**	**21**	**22**	**21**
5	**19**	**19**	**20**	**21**	**20**
4	**18**	**17**	**16**	**17**	**18**
3	**13**	**14**	**15**	**14**	**13**
2	**9**	**10**	**11**	**10**	**9**
1	**6**	**5**	**4**	**5**	**7**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Это означает, например, что если вложить i=3 денежные единицы (пакета) в j=4 проект, то прибыль составит 14 денежные единицы и т.д. Необходимо так распределить 12 денежных единиц по проектам, чтобы суммарная прибыль была максимальная.

Открываем таблицу EXCEL и вводим в ячейки A1-F9 исходные данные, в H1 вводим подпись «Переменные», а в H2-L8 вводим произвольные значения, например единицы. В F11 вводим подпись «Матрица эффективности», как показано на рисунке:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	i \ j	1	2	3	4	5		Переменные				
2	7	23	23	22	24	22		1	1	1	1	1
3	6	20	22	21	22	21		1	1	1	1	1
4	5	19	19	20	21	20		1	1	1	1	1
5	4	18	17	16	17	18		1	1	1	1	1
6	3	13	14	15	14	13		1	1	1	1	1
7	2	9	10	11	10	9		1	1	1	1	1
8	1	6	5	4	5	7		1	1	1	1	1
9	0	0	0	0	0	0						
10												
11	Матрица эффективности											

Матрица эффективности ΔA, содержащая прибыль от вложения дополнительной денежной единицы в проект, рассчитывается следующим образом. Ставим курсор в B12 и вводим «**=B2-B3**», автозаполняем на B12-F18. Значения матрицы (без подписей) примет вид:

i \ j	1	2	3	4	5
7	**3**	**1**	**1**	**2**	**1**
6	**1**	**3**	**1**	**1**	**1**
5	**1**	**2**	**4**	**4**	**2**
4	**5**	**3**	**1**	**3**	**5**
3	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
2	**3**	**5**	**7**	**5**	**2**
1	**6**	**5**	**4**	**5**	**7**

Целевая функция задачи линейного программирования будет равна сумме произведений переменных на соответствующие элементы матрицы эффективности:

$$6x_{11}+5x_{12}+4x_{13}+5x_{14}+7x_{15}+\ldots+$$
$$+3x_{71}+x_{72}+x_{73}+2x_{74}+x_{75}\to \max;$$

для ее ввода в ячейку H10 вводим «Целевая», а в соседнюю I10 функцию СУММПРОИЗВ, категория «Математические», которая вычисляет суммы произведений соответствующих элементов массивов. В полях вызванной функции «Массив 1» делаем ссылку на массив матрицы эффективности B12:F18, а в «Массив 2» на массив переменных H2:L8.

Строим матрицу связности $\Delta x_{ij}=x_{ij}-x_{i-1,j}$. В ячейку H11 вводим подпись «Матрица связности», а в H12 ссылку «**=H2-H3**», автозаполняем на H12-L17. Ограничения задачи линейного программирования будут иметь вид:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{k}x_{ij}\le 12;\\ \Delta x_{ij}\le 0;\\ x_{ij}\le 1;\ \ x_{ij}\ge 0;\ \ x_{ij}-\text{целое};\ \ (i=1,2,\ldots,7;\quad j=1,2,\ldots,5).\end{cases}$$

Для ввода первого ограничения запишем формулу ее левой части. В A20 вводим «Ограничение», а в B20 формулу «**=СУММ(H2:L8)**»..

Вызываем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ (Solver Add – in). Если Вы работаете в «EXCEL 2003» или ранней версии, то заходим в меню СЕРВИС, выбираем НАДСТРОЙКИ и проверяем наличие флажка напротив «Поиск решения», «ОК», заходим вновь в меню СЕРВИС, выбираем ПОИСК РЕШЕНИЯ. Если Вы работаете в «EXCEL 2007» или более поздней версии, то нажимаем левой кнопкой мыши по кнопке “Office” в верхнем левом углу экрана, внизу выбираем «Параметры Excel», слева выбираем НАДСТРОЙКИ, нажимаем кнопку «Перейти» внизу окна и в открывшемся окне проверяем наличие флажка напротив «Поиск решения», «ОК». В меню ДАННЫЕ выбираем ПОИСК РЕШЕНИЯ.

В открывшемся окне в поле «Оптимизировать целевую функцию» делаем ссылку на I10, проверяем ниже, что будет найден ее максимум. В поле «Изменяя ячейки переменных» делаем ссылку на переменные H2-L8, обводя их курсором.

Вводим ниже ограничения, нажимаем «Добавить», в открывшемся окне делаем ссылку на B20, ставим знак «≤» и число 12. Нажимаем «Добавить», ссылка на H12-L17, знак «≤» и значение 0. Нажимаем «Добавить», ссылка на H2-L8, знак «≤» и значение 1. Нажимаем «Добавить», ссылка на H2-L8, знак «≥» и значение 0. Нажимаем «Добавить», ссылка на H2-L8 и в среднем поле вместо знака выбираем «цел». Ограничения введены, нажимаем «Найти решение».

В результате найдено оптимальное решение x_{ij}^*, матрицу которого совместно с матрицей Δx_{ij}^* приводим ниже:

Матрица x_{ij}^*

i \ j	1	2	3	4	5
7	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
5	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
4	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
3	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
2	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Матрица Δx_{ij}^*

i \ j	1	2	3	4	5
7	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
5	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**
4	**0**	**0**	**0**	**-1**	**0**
3	**0**	**-1**	**-1**	**0**	**0**
2	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**

Таким образом, в 1-й проект целесообразно вложить 4 д.е., во 2-й и 3-й по 2 д.е., в 4-ю - 3 д.е., в 5-ю – одну д.е. Целевая функция, равная суммарной прибыли при оптимальном решении равна 60 д.е.

Задачи для самостоятельного решения

ЗАДАНИЕ 1. Решить задачу распределения 5 единиц ресурсов между четырьмя предприятиями.

На будущий период были выделены 5 денежных средств, которые нужно распределить между 4 предприятиями, причем каждому предприятию необходимо выделить средства кратно одной денежной единицы. Прибыль от инвестирования средств зависит от количества вложений $\boldsymbol{x}$ в каждое k-е предприятие, равно $f_k(x)$ и приведено в таблице. Определить оптимальное распределение средств между предприятиями.

x, д.е.	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	1	3	1	2
2	5	4	5	3
3	6	6	6	6
4	7	8	8	7
5	8	8	9	9

ЗАДАНИЕ 2. Решить задачу распределения 20 единиц ресурсов между шестью проектами, причем каждому проекту необходимо выделить средства кратно одной денежной единицы и не более 7. Прибыль от инвестирования средств зависит от количества вложений $\boldsymbol{x}$ в каждый проект, равно $f_k(x)$ и приведено в таблице. Определить оптимальное распределение средств между проектами.

x, д.е.	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$
1	1	3	1	2	1	2
2	5	4	5	3	2	4
3	6	6	5	6	4	5
4	7	7	8	9	7	8
5	8	9	9	10	9	10
6	10	11	10	12	11	12
7	13	12	11	14	12	13

ЗАДАНИЕ 3. Решить задачу распределения 35 рабочих между семью работами, причем каждой работе необходимо выделить не более 9 рабочих. Прибыль от работы зависит от количества рабочих $\boldsymbol{x}$ для каждой работы и равно $f_k(x)$ (приведено в таблице). Определить оптимальное распределение рабочих по работам, так чтобы суммарная прибыль была максимальна.

x, д.е.	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$F_5(x)$	$F_6(x)$	$F_7(x)$
1	7	5	6	4	6	7	5
2	8	7	9	8	8	9	6
3	10	12	11	9	10	12	9
4	11	13	12	10	13	14	11
5	13	16	13	11	14	15	14
6	16	17	15	14	18	17	15
7	17	18	16	15	19	18	17
8	19	20	19	18	20	19	18
9	20	21	20	19	21	20	20

Тема 7. Построение и анализ производственных функций

Рассмотрим методы построения производственных функций по эмпирическим данным.

ПРИМЕР. Пусть на некотором предприятии выпуск продукции y зависит от затрат сырья x_1, энергозатрат x_2, прочих материальных затрат x_3 и трудозатрат x_4. Производственная функция пусть имеет вид:

$$y = a \cdot \sqrt{x_1} \cdot x_2^b + c \cdot x_3 + x_4 + d \ . \qquad (1)$$

Необходимо найти:

а) Оценки параметров производственной функции (1): a, b, c и d.

б) Прогноз выпуска продукции, если запасы ресурсов составят x_1=25, x_2=17, x_3=60, x_4 =4.

б) Среднюю и предельную производительности, эластичность по каждому ресурсу, технологическую норму замены.

Для этого используем статистику всех видов затрат x_1, x_2, x_3, x_4 и выпуска y за 16 недель работы предприятия. Данные представлены в таблице:

x_1	10	28	17	20	24	14	27	19	13	28	19	19	21	11	29	29
x_2	19	18	17	13	17	14	16	19	11	18	12	12	15	15	13	13
x_3	75	72	72	62	67	62	71	78	75	72	77	77	68	68	64	63
x_4	7	10	9	7	3	1	5	3	4	9	10	2	5	5	5	10
y	306	340	311	267	303	257	326	336	284	337	311	304	294	272	287	289

Решение. Для решения задачи будем использовать метод наименьших квадратов: параметры производственной функции *a*, *b*, *c* и *d* выбираются так, чтобы сумма квадратов отклонений эмпирических данных $y_э$ (которые берутся из последней строки таблицы) от теоретических данных $y_т$ (которые рассчитываются по формуле (1)), была минимальна:

$$\sum (y_э - y_T)^2 \to \min \ . \qquad (2)$$

Открываем таблицу Excel. В ячейку A1 вводим подпись Данные. В ячейки A2-Q6 вводим таблицу с данными, ниже – таблицу с параметрами, при этом значения параметров (ячейки B8-E8) – произвольные числа, например единицы, делаем подписи в A9-A11, как показано на рисунке

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Данные																
2	x1	10	28	17	20	24	14	27	19	13	28	19	19	21	11	29	29
3	x2	19	18	17	13	17	14	16	19	11	18	12	12	15	15	13	13
4	x3	75	72	72	62	67	62	71	78	75	72	77	77	68	68	64	63
5	x4	7	10	9	7	3	1	5	3	4	9	10	2	5	5	5	10
6	y	306	340	311	267	303	257	326	336	284	337	311	304	294	272	287	289
7		a	b	c	d												
8	Параметры	1	1	1	1												
9	Функция																
10	Разн.кв.																
11	Целевая																

Далее в B9 вводим функцию (1), задав ее формулой **=$B$8*КОРЕНЬ(B2)*B3^$C$8+$D$8*B4+B5+$E$8**, чтобы ссылка имела значки $, нажимаем F4. Автозаполнением переносим формулу на диапазон B9-Q9. В ячейку B10 вводим разность квадратов между значениями 6-й и 9-й строки, вводим в B10: **=(B6-B9)^2**, автозаполняем на B10-Q10. В ячейку B11 вводим целевую функцию (2) в виде формулы **=СУММ(B10:Q10)**.

Вызываем надстройку «Поиск решений» (Solver) из меню «Данные». В поле «Оптимизировать целевую функцию» - ссылка на B11, ставим оптимизацию на минимум, в поле «Изменяя ячейки переменных» - ссылка на B8-E8, запускаем надстройку. Получаем значения параметров *a*= 2,065, *b*=0,794, *c*=3,062, *d*=1,019. Таким образом, производственная функция получена.

	A	B	C	D	E
12		Ресурсы			
13	Характеристики	x1	x2	x3	x4
14	Средняя				
15	Предельная				
16	Эластичность				
17	Норма замены				

Построим график функции и посмотрим, как он согласуется с опытными данными. Для этого обводим диапазон A6-Q6 и, удерживая Ctrl, дополнительно обводим диапазон A9-Q9. Вызываем «Вставка», «График», выбираем график с точками. Получили графики, которые практически слились в один, что говорит об очень хорошем приближении построенной функции.

Найдем теперь прогноз выпуска продукции, если запасы ресурсов составят x_1=25, x_2=17, x_3=60, x_4 =4. Для этого вводим в R1 подпись Прогноз, а в R2-R5 числа 25, 17, 60, 4. Автозаполнением продлеваем ячейку Q9 на R9 и видим в ней прогноз выпуска 286,69.

На следующем этапе производим расчет основных производственных характеристик: средней и предельной производительностей, эластичности и технологической нормы замены. В таблице ниже расчетов делаем подписи как на рисунке.

Находим средние производительности. Известно, что они равны $A_i = y / x_i$. Вводим в B14 формулу **=R9/R2**, в C14: **=R9/R3**, в D14: **=R9/R4**, в E14: **=R9/R5**.

Находим предельные производительности. Известно, что они равны $M_i = \Delta y / \Delta x_i$. Для их расчета необходимо ввести дополнительный столбец с приращениями *x*. Вводим в S1 подпись «Приращение».

Находим предельную производительность по первому ресурсу. В S2 вводим небольшое изменение первого аргумента, например на 0,1, то было в R1 число 25, а в S1 вводим его же, но увеличенное на 0,1, то есть 25,1. Остальные значения в S3, S4, S5 копируем из R3, R4, R5, то есть вводим в них числа 17, 60 и 4. Автозаполнением продлеваем формулу из R9 в S9. Вводим в R7 и R8 подписи «дельта x» и «дельта y», в S7 вводим число 0,1, а в S8 формулу **=S9-R9**. Вводим в T8 подпись «M=», а в U8 формулу **=S8/S7**. В15 записываем число, получившиеся в U8: 1,94.

Далее находим предельную производительность по второму ресурсу. Меняем в S2 число на 25, а в S3 даем приращение и ставим 17,1. Записываем в C15 число из U8: 4,6. Для третьего ресурса то же самое: меняем в S3 число на 17, а в S4 даем приращение и ставим 17,1. Записываем в D15 число из U8: 3,07. Так же для четвертого ресурса: меняем в S4 число на 60, а в S5 даем приращение и ставим 60,1. Записываем в E15 число из U8: 1.

Находим эластичности, которые равны $E_i = M_i / A_i$. Вводим в B16 формулу **=B15/B14** и автозаполнением переносим ее на B16-E16.

Технологическая норма замены есть $R_{ij} = E_i x_j / (E_i x_i)$. Найдем несколько таких показателей: R_{12}, R_{23} и R_{34} . Для этого в ячейку B17 вводим **=B16*R3/C16/R2**, в C17 формулу **=C16*R4/D16/R3**, а в D17 формулу **=D16*R5/E16/R4**. Производственная функция найдена и основные характеристики рассчитаны.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Найти параметры *b*, a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 линейной производственной функции: $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_0$ и составить прогноз выпуска продукции, если затраты всех ресурсов вырастут на единицу. Найти ее производственные характеристики: среднюю и предельную производительности, эластичность по каждому ресурсу, технологическую норму замены. Данные о затратах ресурсов и выпуске за 13 недель представлены в таблице:

x_1	3	4	3	4	5	7	6	7	8	9	9	9	11
x_2	18	16	17	18	15	15	16	13	14	15	13	12	11
x_3	11	12	15	14	13	15	12	17	13	11	14	15	17
x_4	2	4	5	5	6	8	9	11	11	12	12	13	15
x_5	21	42	47	34	55	81	89	97	101	112	123	129	144
y	16	15	13	14	12	11	11	10	8	8	9	7	6

Задание 2. Найти параметры *b*, *a*1, *a*2, *a*3 и *a*4 производственной функции Кобба-Дугласа: $y = b \cdot x_1^{a1} \cdot x_2^{a2} \cdot x_3^{a3} \cdot x_4^{a4}$, если затраты всех ресурсов вырастят на две единицы. Найти ее производственные характеристики. Данные о затратах ресурса и выпуске за 12 месяцев в таблице:

Значения x_i (одинаково для всех вариантов)												
x_1	57	51	59	62	55	53	69	60	53	58	61	66
x_2	36	32	33	39	30	29	36	32	34	33	37	31
x_3	13	19	21	11	18	22	11	26	15	21	22	19
x_4	46	43	39	35	48	42	40	33	37	44	41	39
Вариант	Значения y (по вариантам)											
1.	368	361	383	315	373	358	339	370	317	413	444	370
2.	187	194	214	165	201	203	180	221	167	228	239	215
3.	120	122	145	108	128	130	119	150	113	146	159	138
4.	361	379	426	321	387	389	339	443	327	445	488	412
5.	33	35	38	24	31	34	28	40	31	41	42	35
6.	13	19	18	13	14	19	11	21	12	20	19	18
7.	35	35	35	29	34	33	31	35	31	38	40	34
8.	83	88	94	67	90	94	73	98	77	99	108	92
9.	27	30	35	29	32	30	29	33	28	33	32	30
10.	45	45	48	39	48	48	44	48	42	56	58	48
11.	282	277	303	246	287	277	268	295	246	318	344	292
12.	68	70	77	68	72	72	75	81	65	77	86	79

Тема 2.2. Построение производственных функций

Часть 1. Построение линейной производственной функции

Некоторая организация производит гаражные ворота. Основные виды ресурсов, необходимых для производства, составляют: затраты металлопроката X_1, затраты электроэнергии X_2 и трудозатраты X_3. Результаты наблюдений за затратами ресурсов и объема выпускаемой продукции *Y* за 14 недель, приведены в таблице:

X_1	20	20	18	17	17	19	18	16	16	16	15	15	14	14
X_2	37	38	36	42	47	55	53	54	49	50	52	52	51	54
X_3	3	4	3	5	4	3	2	3	2	2	1	2	1	3
Y	112	132	129	134	132	137	139	139	138	143	141	146	148	150

Построим линейную производственную функцию. Для этого предварительно исследуем матрицу парных коэффициентов корреляции. Вводим исходные данные вместе с подписями в ячейки A1-O4. Для построения матрицы парной корреляции вызываем меню «Данные/Анализ данных» (если пункт меню отсутствует, то позовите преподавателя, он подключит надстройку). Выбираем пункт «Корреляция». В появившемся окне в поле «Входной интервал» задаем ссылку на таблицу – A1-O4. Указываем группирование «По строкам». Ставим флажок в «Метки в первом столбце» (так как в ссылках на таблицу указаны подписи строк). В области «Параметры вывода» ставим флажок напротив «Выходной интервал» и напротив в поле даем ссылку на какую-либо ячейку, откуда будет осуществляться вывод данных, например A7. Нажимая «ОК», получаем нижнюю половину матрицы парной корреляции. Для общей оценки мультиколлинеарности факторов и адекватности регрессионной модели рассчитаем определители матриц R и R_{11}. Сформируем полную матрицу парных коэффициентов корреляции. В C8 задаем формулу «=B9», в D8 ссылку «=B10», в D9 – «=C10», в E8 – «=B11», в E9 – «=C11», в E10 – «D11». Далее, для вычисления определителей в ячейку A13 вводим заголовок «R =» и в B13 ставим курсор и задаем функцию «МОПРЕД» (категория «Математические»), в которой аргумент «Массив» является ссылкой на ячейки B8:E11. В ячейку A14 вводим заголовок «R_{11} =» и в B14 ставим курсор и задаем функцию «МОПРЕД» с аргументом «Массив» - ссылкой на B8:D10. Результат - 0,427104 (ближе к 0, чем к 1), что говорит о достаточно высокой общей мультикорреляции. Найдем теперь коэффициент множественной корреляции. В A15 вводим «Rx=», а в B15 формулу «=КОРЕНЬ(1-B13/B14)». Результат 0,883788 говорит о достаточно высокой связи между фактором и функцией отклика.

Проведем теперь отбор факторов. Рассмотрим матрицу коэффициентов парной корреляции. Видно, что $r_{x1,x2} = -0{,}615$, $r_{x1,x3} = 0{,}5097$, $r_{x2,x3} = -0{,}496$. Факторы можно считать коллинеарными (интеркоррелированными), если их парный коэффициент по модулю больше 0,7. В нашем случае таких пар факторов нет. Все факторы можно считать независимыми друг от друга и использовать в регрессионном уравнении. Определим теперь влияние каждого фактора X_i на функцию отклика *Y*. Для этого рассмотрим коэффициенты парной корреляции $x_{x1,y} = -0{,}815$; $r_{x2,y} = 0{,}768$; $r_{x3,y} = -0{,}45$. Видно, что третий коэффициент -0,45 намного меньше по модулю, чем примерная граница 0,7, поэтому влияние третьего фактора X_3 на результат мало и его можно отбросить из рассмотрения.

Копируем теперь на A18-O20 функцию отклика и значимые факторы (1, 2 и 4 строки, соответственно A1-O2 копируем в A18-O19, а A4-O4 – в A20-O20). В ячейку A22 вводим заголовок «Линейная» и в соседнюю B22 вводим функцию, определяющую параметры линейной регрессии «=ЛИНЕЙН» (категория «Статистические»). Аргументы функции: «Изв_знач_y» - B20:O20 (значения функции), «Изв_знач_x» - B18:O19 (значения двух значимых аргументов), «Константа» – 1 (расчет свободного члена), «Стат» - 1 (вывод дополнительных характеристик регрессии). Результат вычислений функции ЛИНЕЙН в случае функции нескольких переменных $y = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_kx_k + a_0$ имеет вид:

Коэффициент a_k	Коэффициент a_{k-1}	…	Коэффициент a_1	Коэффициент a_0
Ошибка коэффициента	Ошибка коэффициента	…	Ошибка коэффициента	Ошибка коэф.
Детерминация R_{xy}	СКО y	…	*нет данных*	*нет данных*
F – статистика	Степень свободы n-k-1	…	*нет данных*	*нет данных*
Регрессионная сумма $S_в^2$	Остаточная сумма S_a^2	…	*нет данных*	*нет данных*

В нашем случае имеем два фактора X_1 и X_2, поэтому обводим 5 строк и три столбца B22-D26 и нажимаем F2 и Ctrl+Shift+Enter.

Первая строка результата – значения параметров регрессионного уравнения $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_0$ - числа a_2, a_1, a_0. Следовательно, уравнение регрессии есть $y = 2{,}619x_1 - 0{,}603x_2 + 152{,}231$. Вторая строка – стандартные ошибки коэффициентов. Все они меньше самих коэффициентов, это значит, что коэффициенты значимы. В ячейках D24-D26 стоят значения «#Н/Д» (нет данных), как и должно быть в соответствии с таблицей.

Коэффициент детерминации равен 0,7783. Видно, что F-критерий регрессионной модели равен 19,3097. Проверим модель на адекватность. Вычислим критическое значение статистики. Вводим в ячейку H22 подпись «F-критическое» а в I22 вводим функцию FРАСПОБР, имеющую аргументы: «Вероятность» – уровень значимости, если он не задан в условии (как в нашем случае), то обычно его принимаем 0,05. Аргумент «Степени_свободы_1» - число независимых переменных (у нас их две - X_1 и X_2). Аргументом «Степени_свободы_2» служит число, показанное в ячейке C25 (в данном примере – 11). Видно, что F-статистика больше ее критического значения, поэтому модель адекватна.

Задание на самостоятельную работу

ЗАДАНИЕ 1. Построить двухфакторную линейную производственную функцию по данным

X_1	3	3	6	6	7	8	9	9	11	12
X_2	9	8	9	7	4	5	3	5	1	0
Y	38,1	38,6	40,9	38,6	41,3	43,1	44,3	43,0	45,8	46,2

ЗАДАНИЕ 2. Отобрать факторы и построить линейную производственную функцию для приведенных данных, проверить значимость модели на уровне 0,01.

X_1	3	4	3	4	5	7	6	7	8	9	9	9	11
X_2	18	16	17	18	15	15	16	13	14	15	13	12	11
X_3	11	12	15	14	13	15	12	17	13	11	14	15	17
X_4	2	4	5	5	6	8	9	11	11	12	12	13	15
Y	16	15	13	14	12	11	11	10	8	8	9	7	6

Часть 2. Построение производственной функции Кобба-Дугласа

Рассмотрим пример построения производственной функции Кобба-Дугласа

Рассмотрим следующий пример.

Предприятие выпускает продукцию, количество которой за месяц Y (тыс. шт.) зависит от затрат материальных ресурсов X_1 (т.), трудозатрат X_2 (тыс. час.) и энергозатрат X_3 (млн. кВт). При расширении производства наблюдалась следующая эмпирическая зависимость между выпуском Y и затратами ресурсов X_1, X_2, X_3.

X_1	16	20	18	22	21	24	27	26	28	31	35	34	33	34
X_2	50	55	58	50	57	59	62	64	59	64	59	62	65	70
X_3	7	6	7	8	10	8	9	7	11	10	12	11	9	13
Y	45,0	50,3	54,1	55,1	60,8	65,6	68,8	66,6	73,2	81,9	91,8	86,1	83,1	93,1

Из теории производственных функций известно, что зависимость результирующего признака (функции откликов) от факторов имеет вид $y = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot x_3^{a_3}$. Вводим исходные данные вместе с подписями в ячейки A1-O4. Чтобы привести уравнение к линейному виду нужно прологарифмировать уравнение $\ln y = \ln y_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2 + a_3 \ln x_3$. Вводим вместо исходных данных их логарифмы. Для этого в ячейки A5-A8 вводим подписи «Ln X1», «Ln X2», «LnX3», «LnY». Ставим курсор в ячейку B5 и вводим функцию LN (категория математические) с аргументом «Число» B1, которое отобразится в строке формул в виде «=LN(B1)», затем переносим формулу на все данные, автозаполняя ячейки B5-O8. После этого исследуем матрицу парных коэффициентов корреляции. Для построения матрицы вызываем меню «Сервис/Анализ данных» и выбираем пункт «Корреляция». В появившемся окне в поле «Входной интервал» задаем ссылку на преобразованные данные – A5-O8. Указываем группирование «По строкам». Ставим флажок в «Метки в первом столбце» (так как в ссылках на таблицу указаны подписи строк). В области «Параметры вывода» ставим флажок напротив «Выходной интервал» и напротив в поле даем ссылку на какую-либо ячейку, откуда будет осуществляться вывод данных, например A10 и нажимаем «ОК». Для общей оценки мультиколлинеарности факторов и адекватности регрессионной модели рассчитаем определители матриц R и R_{11}. Сформируем полную матрицу парных коэффициентов корреляции. В C11 задаем формулу «=B12», в D11 ссылку «=B13», в D12 – «=C13», в E11 – «=B14», в E12 – «=C14», в E13 – «D14». Далее, для вычисления определителей в ячейку A16 вводим заголовок «R =» и в B16 ставим курсор и задаем функцию «МОПРЕД» (категория «Математические»), в которой аргумент «Массив» является ссылкой на ячейки B11:E114. В ячейку A17 вводим заголовок «R_{11} =» и в B17 ставим курсор и задаем функцию «МОПРЕД» с аргументом «Массив» - ссылкой на B11:D13. Результат - 0,163303, он близок к нулю, что говорит о достаточно сильной общей мультикорреляции факторов между собой. Найдем теперь коэффициент множественной корреляции. В A18 вводим «Rx=», а в B18 формулу «=КОРЕНЬ(1-B16/B17)». Результат 0,993187 говорит о достаточно высокой связи между фактором и функцией отклика.

Проведем теперь отбор факторов. Видно, что первый фактор сильно связан и со вторым и с третьим, поэтому его выводим их регрессионной модели. Одновременно видно, что влияние второго и третьего фактора на функцию Y достаточно сильно, поэтому, принимаем к рассмотрению регрессионную модель $y = F(x_2, x_3)$. В строках с номерами 20-22 копируем значимые факторы. Для этого в A20-A22 вводим подписи «Ln X2, LnX3, LnY», а в B20 вводим функцию «=LN(B2)»

и автозаполняем ее B20-O22. В ячейку A24 вводим заголовок «Линейная» и в соседнюю B24 вводим функцию, определяющую параметры линейной регрессии «=ЛИНЕЙН». Аргументы функции: «Изв_знач_y» - B22:O22, «Изв_знач_x» - B20:O21, «Константа» = 1, «Стат» = 1. Далее обводим 5 строк и три столбца B24-D28 (т.к. находим параметры функции Y и двух факторов X_2 и X_3), и нажимаем F2 и Ctrl+Shift+Enter. Первая строка результата – значения параметров преобразованного регрессионного уравнения. Чтобы получить данные исходного уравнения, вводим в G10, G11 и G12 подписи «$a_1 =$, $a_2 =$, $a_0 =$», а в соседние ячейки H10, H11 и H12 формулы "=C24", "=B24" и "=EXP(D24)". В результате уравнение регрессии есть $y = 0{,}132 \cdot x_2^{1{,}210} \cdot x_3^{0{,}577}$. Вторая строка – стандартные ошибки коэффициентов. Все они меньше самих коэффициентов, это значит, что коэффициенты значимы. Коэффициент детерминации равен 0,892. Видно, что F-критерий регрессионной модели равен 45,359. Проверим модель на адекватность. Вычислим критическое значение статистики. Вводим в ячейку H24 подпись «F-критическое» а в I24 вводим функцию FРАСПОБР, имеющую аргументы: «Вероятность» – 0,05 (т.к. $\alpha = 1 - p = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$), «Степени_свободы_1» - 2 (число независимых переменных равно двум - X_2 и X_3). Аргументом «Степени_свободы_2» служит число, показанное в ячейке C27 (в данном примере – 11). Видно, что F-статистика больше ее критического значения, поэтому модель адекватна.

Задание на самостоятельную работу

Развивающееся предприятие располагает статистикой о зависимости количества выпуска товара z_i (тыс. ед. в месяц). от месячной трудоемкости (тыс. час. в месяц), и от количества сырья, затраченного на выпуск (млн. ед. ресурса в месяц). Необходимо найти приближение производственной функции Кобба-Дугласа $\tilde{z} = ax^b y^c$, с вероятностью p=0,95 проверить модель на адекватность.

Значения факторов x_i и y_i (одинаковое для всех вариантов)																		
x_i	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6
y_i	4	6	8	10	5	7	9	11	6	9	11	13	5	9	13	5	8	11
z_i	1,8	2,0	2,4	2,7	2,3	2,7	3,0	3,5	2,5	3,5	3,9	4,5	2,7	3,8	4,8	3,2	4,1	4,9

Тема 8. Целевая функция потребления. Построение функции спроса

Рассмотрим некоторого потребителя, который в результате своего существования потребляет некоторые блага. Уровень удовлетворения потребностей потребителя обозначим через *U*. Предположим, что имеется *n* видов благ Б$_1$, Б$_2$,…, Б$_n$. Пусть количество потребления каждого блага равно x_1, x_2 ,…, x_n. Целевой функцией потребления называется зависимость $U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$. Каждый потребитель стремится максимизировать уровень удовлетворения потребностей, то есть $U \to \max$. Обозначим цену на единицу каждого блага через p_1, p_2 ,…, p_n, а доход потребителя через *D*. Тогда должно выполняться бюджетное ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \le D$. В результате для нахождения оптимального набора благ необходимо решать задачу оптимального программирования:

$$U(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max;$$

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \le D; \\ x_i \ge 0, \ (i = 1,2,...,n). \end{cases}$$

Рассмотрим методы ее решения на примере.

ПРИМЕР. Пусть число благ равно трем, а функция потребления равна $U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$. Предположим, что цена на единицу первого блага равна 15, второго 10 и третьего 15, а доход потребителя составляет 500. Тогда задача примет вид:

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \to \max;$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 + 15x_3 \le 500; \cdot \\ x_{1,2,3} \ge 0. \end{cases}$$

Подготовим данные для решения задачи в Excel согласно рисунку:

	A	B	C	D
1		Благо 1	Благо 2	Благо 3
2	Цена p	15	10	15
3	Количество x	1	1	1
4	Целевая		Доход	500
5	Ограничение			
6				

Вводим в ячейку B4 «=КОРЕНЬ(B3*C3*D3)» (кавычки не вводить!), а в B5 «=B3*B2+C3*C2+D3*D2». Запускаем ДАННЫЕ/ПОИСК РЕШЕНИЯ. В ячейку «Установить целевую» устанавливаем ссылку на B4, проверить, что флажок ниже поля стоит напротив надписи «Равной максимальному значению». После ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» и обводим ячейки с переменными B3, C3 и D3. Для того, чтобы ввести ограничения, наживают кнопку «Добавить», откроется окно «Добавление ограничения». В левом поле «Ссылка на ячейку» вводят ссылку на левую часть первого ограничения – ячейку B5, в центральном окне определяем знак ≤ и в правом «Ограничения» делаем ссылку на доход D4. Для ввода второго ограничения вновь нажимаем «Добавить», ставим курсор в левое поле и обводим ячейки B3, C3 и D3 в среднем окне ставим «≥» и в правом число 0. Нажимаем «Выполнить» (Solve), подтверждаем результаты, выбирая «Сохранить найденное решение» и «ОК», получаем результат: $x_1 = 11{,}1$; $x_2 = 16{,}7$; $x_3 = 11{,}1$; целевая функция равна 45,4.

Решим теперь задачу нахождения функции спроса по цене. Найдем, например, спрос на второе благо для разных цен на единицу этого блага. Будем задавать цену на второе благо от 5 до 15 и фиксировать спрос x_2 при этих ценах. Введем в столбец F цену блага, а в столбец G спрос на него. Ставим курсор в F1 и вводим подпись «Цена», а в ячейку G1 вводим подпись «Спрос». В соответствии с условием задачи, цена второго блага составляет 10 денежных единиц, в результате решения спрос на

это благо составляет $x_2 = 16{,}7$. Вводим в ячейку F7 значение цены 10, а в соседнюю G7 - спрос 16,7. Рассчитаем теперь спрос при цене 11. Исправляем в C2 значение на 11, вызываем ДАННЫЕ/ПОИСК РЕШЕНИЯ (Solver Add – in), нажимаем «Выполнить» (Solve), подтверждаем результаты. Видим в ячейке C3 новое значение спроса - $x_2 = 15{,}2$. Вводим в F8 вручную число 11, в G8 число 15,2. Точно также (обязательно проделать на ЭВМ!) изменяем в C2 значения на 12, 13, 14 и 15, записав эти же значения в F9-F12, каждый раз запускаем надстройку «Поиск решения», получаем новые результаты в C3, записываем их вручную (не копированием, округляя до десятых) в G9-G12. Далее рассчитываем значения спроса для цены меньшей 10 единиц. Для этого изменяем в C2 значения на 5, 6, 7, 8 и 9, записав эти значения в F2-F6, каждый раз запускаем надстройку «Поиск решения», получаем новые результаты в C3, записываем их в G2-G6. В результате, при правильном выполнении всех действий, получаем следующие результаты:

Ячейка	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12
Значение	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Ячейка	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12
Значение	**33,3**	**27,8**	**23,8**	**20,8**	**18,5**	**16,7**	**15,2**	**13,9**	**12,8**	**11,9**	**11,1**

Построим по полученным данным функцию спроса. Для этого ставим курсор в любую свободную ячейку, вызываем мастер диаграмм (ВСТАВКА/ДИАГРАММА), выбираем тип диаграммы «График», вид «График с маркерами» Получаем график функции спроса по цене. Точно также можно исследовать спрос и на первое и третье благо.

Найдем теперь функцию спроса по доходу на второе благо. Для этого будем менять доход в диапазоне 200-500 через 50 единиц, фиксируя спрос в ячейке C3. Вводим в H1 подпись «Доход», а в I1 подпись «Спрос». Исправляем в C2 цену на 10, а в D4 ставим доход 200. Вызываем и запускаем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ (Solver Add – in). Видим, что спрос на второе благо равен 6,7. Вводим в H2 значение дохода 200, а спрос 6,7 вводим в I2. Далее, по аналогии, изменяем в D4 доход на 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, занося эти данные в H3-H10, каждый раз запускаем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ (Solver Add – in), полученный в C3 спрос вносим в ячейки I3-I10. При правильном расчете результаты будут 8,3; 10; 11,7; 13,3; 15; 16,7; 18,3; 20. По полученным данным, также как и для функции спроса по цене, строим график. Видно, что в данном случае график спроса по доходу прямая линия.

Следует отметить, что можно построить функцию перекрестного спроса на одно благо по цене на другое.

Задание 1. Четырехфакторную целевую функцию потребления $U = x_1 \cdot \sqrt{x_2 \cdot x_3} \cdot x_4$, цены на блага $p_1 = 10,\ p_2 = 20,\ p_3 = 10,\ p_4 = 12$, и доход =1000.

1. Составив и решив задачу оптимального программирования, найти оптимальный набор благ.

2. Составить функцию спроса на второе благо от его цены, взяв 5 целых последовательных значений цены до и после той, какая указана в таблице.

3. Составить функцию спроса на третье благо по доходу, взяв по четыре значения дохода до и после указанной в таблице с шагом 50.

Задание 2. Целевая функция потребления есть $U = \ln(x_1 \cdot x_2 + 2)\sqrt{x_3}$, цены на блага $p_1 = 80,\ p_2 = 90,\ p_3 = 70$, и доход D=20000.

1. Найти оптимальный набор благ.

2. Построить функцию спроса на первое благо от его цены, взяв 10 целых последовательных значений цены до и после той, какая указана в задании.

3. Составить функцию спроса на третье благо по доходу, взяв по десять значения дохода до и после указанной в задании с шагом 500.

Задание 3. Целевая функция потребления есть $U = 3x_1^{0.8} \cdot x_2^{0.9}\sqrt{x_3} + 2x_4 + x_5$, цены на блага $p_1 = 30,\ p_2 = 50,\ p_3 = 40,\ p_4 = 50,\ p_5 = 70$, и доход D=8000.

1. Найти оптимальный набор благ.

2. Построить функцию спроса на второе благо от его цены, взяв цену 20, 25, …,60.

3. Составить функцию спроса на третье благо по доходу, взяв доход 6000, 6500, …, 11000.

Тема 9. Балансовые модели

Балансовые модели предназначены для определения равновесного баланса между производством, потреблением и реализацией во внешнюю сферу продукции нескольких взаимосвязанных отраслей.

Предположим, что рассматривается *n* отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Пусть общий объем произведенной продукции *i*-й отрасли равен X_i. Полная стоимость продукции, произведенной *i*-й отраслью, будем называть валовым продуктом этой отрасли. Теперь рассмотрим, на что тратится продукция, производимая отраслью. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и потребление другими отраслями, связанными с этой отраслью. Количество продукции *i*-й отрасли, предназначенной для конечного потребления (вне сферы материального производства) личного и общественного *j*-й отраслью, обозначим x_{ij}. Оставшаяся часть предназначена для реализации во внешнюю сферу. Эта часть называется конечным продуктом. Пусть *i*-я отрасль производит Y_i конечного продукта.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год). Так как валовой объем продукции любой *i*-й отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой *n* отраслями, и конечного продукта, то уравнение баланса между производством и потреблением будет иметь вид $X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i$, (*i*= 1, 2, …, *n*). Можно также рассчитать такой показатель, как чистую продукцию C_j, которая равна разности между валовым продуктом и суммарным потреблением данной отраслью: $C_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$.

В результате, имеем четыре матрицы: матрицу межотраслевых производственных связей $x_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$; матрицу валовой продукции $X_i = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$; матрицу конечной продукции $Y_i = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$ и матрицу чистой продукции $C_j = (C_1, C_2, ..., C_n)$.

Одной из задач балансового анализа является определение валового продукта Y_i, если известно распределение конечного X_i. Для этого введем коэффициенты прямых затрат: $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$. Они получаются в результате деления всех элементов каждого столбца матрицы x_{ij} на соответствующий элемент матрицы межотраслевых производственных связей *X*. Из последнего выражения можно получить: $x_{ij} = a_{ij} X_j$, откуда $X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i$.

Если обозначить матрицу коэффициентов прямых затрат как *A*, то получим окончательные выражения для определения валового продукта по конечному: $X = AX + Y$, и конечного по валовому: $Y = X - AX = (E - A)X$, где *E* — единичная матрица того же размера, что и *A*.

Рассмотрим решение межотраслевого баланса на ЭВМ в соответствии с моделью Леонтьева на следующем примере.

Пример: Имеется баланс трех взаимосвязанных отраслей за предыдущий период:

Производство	Потребление			Конечный продукт
	Отрасль 1	Отрасль 2	Отрасль 3	
Отрасль 1	17	13	11	83
Отрасль 2	8	16	9	97
Отрасль 3	21	15	13	132

1. Найти валовый продукт каждой отрасли, чистую продукцию каждой отрасли, матрицу коэффициентов прямых затрат.
2. Какой будет конечный продукт каждой отрасли, если валовый станет равен, соответственно 100, 150 и 200.
3. Какой будет валовый продукт каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли необходимо увеличить на 50 %, второй уменьшить на 4 единицы, а третьей увеличить на 6 единиц.

Подготавливаем таблицу исходных данных в электронной таблице Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Производство	Потребление			Конечный пр-т	Валовый пр-т	Нов. Конеч. 1	Нов. Вал. 1
2		отр. 1	отр. 2	отр. 3				
3	отрасль 1	17	13	11	83			
4	отрасль 2	8	16	9	97			
5	отрасль 3	21	15	13	132			
6	Чистая прибыль						Нов. Конеч. 2	Нов. Вал. 2
7	Коэффициенты							
8	затрат							

1. Для нахождения валового продукта каждой отрасли в ячейку F3 вводим формулу «=СУММ(B3:E3)» (для ее ввода достаточно нажать кнопку автосуммы со значком Σ). Результат – 124. Автозаполнением переносим результат ячейки на F4 и F5. Для рассчета чистой прибыли вводим в ячейку B6 формулу «=F3-B3-B4-B5», в C6 формулу «=F4-C3-C4-C5», в D6 формулу «=F5-D3-D4-D5». Находим коэффициенты прямых затрат. Для этого каждый столбец матрицы B3-D5 нажно разделить на соответствующий валовой продукт. В ячейку B7 вводим «=B3/$F$3» (чтобы сделать абсолютную ссылку $F$3 нужно щелкнуть по ячейки F3 и нажать клавишу F4). Автозаполняем B7 на B8 и B9. Аналогично вводим в C7 «=C3/$F$4» и автозаполняем на C8 и C9. Вводим в D7 «=D3/$F$5» и автозаполняем на D8 и D9. Матрица коэффициентов затрат рассчитана.

2. Так, как новый валовой продукт каждой отрасли равен, соответственно 100, 150 и 200, то вводим эти числа в ячейки H3, H4 и H5. По формуле, новый конечный продукт равен $Y = (E - A)X$. Для ее использования вводим единичную матрицу. В A11 вводим подпись «E=», а в B11-D13 вводим числа

1	0	0
0	1	0
0	0	1

. Рассчитываем матрицу (E-A). Вводим в A15 подпись «(E-A)=», а в B15 «=B11-B7». Автозаполняем ячейку на B15-D17. Для вычисления результата – новых значений конечного продукта в ячейку G3 вводим функцию перемножения матриц – МУМНОЖ (категория «Математические»). Аргументы функции: в поле «массив 1» даем ссылку B15:D17 (матрица E-A), в поле «массив 2» - H3:H5 (новый валовой продукт). Далее обводим ячейки G3-G5 курсором мыши, выделяя их, и нажимаем F2 и Ctrl+Shift+Enter. Результат – новый конечный продукт.

3. Если конечный продукт первой отрасли нужно увеличить на 50 %, то он станет 124,5, если второй уменьшить на 4, то он станет 93, если третий увеличить на 6 единиц, он будет 138. Вводим в ячейки G7-G9 числа 124,5; 93; 138. В соответствии с формулой Леонтьева новый валовый продукт находим по формуле $X = (E - A)^{-1} Y$. Для расчета обратной матрицы в ячейку E15 вводим подпись «(E-A) обрат.», а в F15 ставим формулу расчета обратной матрицы МОБР (категория «Математические»).

Аргумент функции – ссылка на B15-D17. Обводим курсором ячейки F15-H17 и нажимаем F2 и Ctrl+Shift+Enter. Для вычисления новых значений валового продукта в ячейку H7 вводим функцию перемножения матриц – МУМНОЖ. Аргументы: в поле «массив 1» даем ссылку F15:H17, в поле «массив 2» - G7:G9. Далее обводим ячейки H7-H9 и нажимаем F2 и Ctrl+Shift+Enter. Результат – новый валовой продукт. Задача решена.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Межотраслевой баланс производства и распределения продукции для 4 отраслей имеет вид

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Валовой продукт
	1	2	3	4	
1	90	100	60	85	800
2	70	25	100	65	400
3	35	70	85	10	800
4	25	65	65	90	750

Необходимо:

1. Найти конечный продукт каждой отрасли, чистую продукцию каждой отрасли, матрицу коэффициентов прямых затрат.

2. Какой будет конечный продукт каждой отрасли, если валовой продукт первой отрасли увеличится в 2 раза, у второй увеличится на половину, у третьей не изменится, у четвертой – уменьшится на 10 процентов.

3. Найти валовой продукт, если конечный станет равен 700, 500, 850 и 700.

Задание 2. Межотраслевой баланс производства и распределения продукции для 5 предприятий, который имеет вид

Производящие предприятия	Потребляющие предприятия					Конечный продукт
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
1	374	330	486	449	303	1084
2	324	359	358	461	405	1161
3	336	456	405	396	303	1272
4	422	413	322	321	450	1216
5	471	385	489	387	389	1056

1. Найти валовый продукт каждой отрасли, чистую продукцию каждой отрасли, матрицу коэффициентов прямых затрат.

2. Какой будет конечный продукт каждой отрасли, если валовой продукт первой отраслей станет равен: (3020, 3163, 3338, 3321, 2987).

3. Найти валовой продукт, если конечный станет равен: (1205, 1076, 1268, 1197 и 1095).

Задание 3. Межотраслевой баланс производства и распределения продукции для 7 отраслей имеет вид:

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли							Конечный продукт
	1	2	3	4	5	6	7	
1	82	76	137	118	72	125	107	335
2	138	85	86	134	144	141	147	437
3	132	73	87	83	79	125	128	258
4	137	71	108	100	121	128	85	297
5	88	80	109	74	141	128	75	393
6	81	106	128	133	113	111	145	358
7	114	104	79	100	97	129	121	293

1. Найти валовый продукт каждой отрасли, чистую продукцию каждой отрасли, матрицу коэффициентов прямых затрат.

2. Какой будет конечный продукт каждой отрасли, если валовой продукт отраслей станет в соответствии с таблицей:

Отрасль	1	2	3	4	5	6	7	8
Новый валовый пр-т	1183	1011	1009	1198	1021	1198	1028	1132

3. Найти валовой продукт, если конечный станет в соответствии с таблицей:

Отрасль	1	2	3	4	5	6	7	8
Новый валовый пр-т	469	308	490	304	398	435	391	393