# **Конспект лекций по дисциплине «Моделирование и анализ бизнес-процессов»**

# **Часть 1. Моделирование бизнес-процессов с помощью случайных процессов**

Экономические системы, как правило, являются вероятностными или стохастическими, так как выходные параметры системы случайным образом зависят от входных параметров.

Можно выделить следующие причины, по которым экономические системы являются стохастическими:

1. система сложная, многокритериальная, описывается многоуровневой иерархической структурой;
2. система подвержена влиянию большого числа неуправляемых внешних факторов (погодные условия, внешняя политика, социальные факторы и т. д.);
3. преднамеренное искажение информации, сокрытие информации и целенаправленная экономическая диверсия.

Исходя из этого для моделирования многих экономических систем используют математические методы, основанные на применении законов теории вероятностей, которые получили название *стохастических методов*.

При применении стохастических методов оптимизация целевой функции ведется по среднему значению, то есть при заданных параметрах необходимо найти такое решение, когда значение целевой функции *в среднем* будет максимальным.

Стохастические системы в экономике описываются марковским аппаратом, в основе которого лежат марковские *случайные процессы*. Они применяются в случаях, когда нельзя заформализовать модель (описать аналитическим выражением) и в случае, когда система представляет собой многопараметрическую вероятностную экономическую систему.

## **1. Случайные процессы и их классификация**

Случайный процесс (СП) это некоторый процесс или явление, поведение которого в течение времени и результат заранее предсказывать невозможно. Примеры случайных процессов: динамика изменения курса валют или акций, выручка или прибыль организации с течением времени, объемы продаж товара и т. д.

Если случайный процесс может изменить свое состояние только в строго определенный момент времени, то он называется процессом с дискретным временем.

Если же смена состояния возможна в произвольный момент времени, то это СП с непрерывным временем.

Если в любой момент времени СП представляет собой дискретную случайную величину (ее значение можно перечислить и выделить два соседних значения), то это процесс с дискретным состоянием.

Если же в любой момент времени состояние может меняться непрерывно, плавно и нельзя выделить два соседних состояния, то это СП с непрерывным состоянием.

Таким образом, возможно 4 вида СП:

1) с непрерывным временем и непрерывным состоянием (пример: температура воздуха в некоторый момент времени, изменяется плавно в любой момент времени);

2) с непрерывным временем и дискретным состоянием (пример: число посетителей в магазине, изменяется кратно одному в любой момент времени);

3) с дискретным временем и непрерывным состоянием (пример: динамика курса — курс валюты изменяется плавно в момент валютных торгов);

4) с дискретным временем и дискретным состоянием (пример: число пассажиров в транспорте изменяется кратно одному и только в определенные моменты времени, на остановках).

Рассмотрим некоторую систему *S*, в которой в данный момент времени *tо* протекает СП. Этот процесс называется марковским, если для любого момента времени *t*> *tо*; поведение системы в будущем зависит только от того, в каком состоянии система находилась в данный момент времени при *t***=***tо*, и никак не зависит от того, как, когда и в каких состояниях она пребывала в прошлом при *t***<***t*о**.** Другими словами, «прошлое» марковского процесса никак не влияет на «будущее» (только через «настоящее»).

## **2. Потоки событий**

Простейшим видом СП являются потоки событий. Потоком событий называется некоторая последовательность однотипных событий, которые происходят в случайные моменты времени (например, звонки по телефону, посетители магазина, автомобили, проезжающие перекресток, и т. д.). Они относятся к СП с дискретным состоянием и непрерывным временем. Математически поток событий можно изобразить в виде случайных точек на оси времени:

*An*

*…*

*A2*

*A1*

  *t1*

*t2*

*…*

*tn*

*x*

Если события в потоке происходят поодиночке, а не группами из нескольких событий, то такой поток называется ординарным. Поток событий называется потоком без последствий, если для любых непересекающихся интервалов времени число событий в одном интервале никак не влияет на то, сколько и каким образом будут происходить события в другом интервале. Ординарный поток без последствия называется потоком Пуассона. Важнейшей характеристикой любого потока событий является его интенсивность — среднее число событий, произошедших в потоке за одну единицу времени .

С интенсивностью тесно связана величина , которая имеет смысл среднего интервала времени между двумя событиями. Если интервалы между соседними событиями есть случайные величины, которые независимы друг от друга, то такой поток событий называется потоком Пальма.

Если интенсивность потока событий не зависит от времени , то такой поток называется стационарным. Если в потоке события происходят через равные интервалы времени, то он называется регулярным.

Стационарный поток Пуассона называется простейшим потоком. В экономическом моделировании в основном используют потоки Пуассона, в том числе простейшие. Для них справедливы следующие теоремы:

1. Число событий, произошедших в потоке Пуассона, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона. Вероятность того, что в потоке Пуассона с интенсивностью  за интервал времени (*t*1; *t*2) произойдет ровно *k* событий, равна

,

где .

Если поток простейший , то .

2. Интервал между событиями или время ожидания очередного события *T* в потоке Пуассона есть случайная величина, распределенная по показательному закону, т. е. вероятность того, что следующее событие произойдет не ранее *t***,** равна

.

Если поток простейший, то .

***Пример 1***. Магазин посещают в среднем 20 покупателей за час. Определить вероятность того, что: а) за 5 минут будет 2 покупателя; б) за 10 минут будет не менее 3 покупателей; в) за 3 минуты не будет ни одного покупателя.

*Решение.* Выбрав за единицу времени 1 минуту, интенсивность пуассоновского потока покупателей магазина  (20 покупателей в час или 1/3 покупателя за минуту):

а) *k* = 2, *t*1 = 0, *t*2 = 5,

;

б) *k*≥ 3, *t*1 = 0, *t*2 = 10, найдем вероятность события обратного события , что будет менее 3 покупателей:

;

;

в) по второй теореме *t*= 3, .

## **3. Марковский случайный процесс с дискретным состоянием**

В моделировании вероятностных (стохастических) экономических систем очень часто используют марковский СП. Рассмотрим СП с дискретным состоянием и непрерывным временем. Тогда все его состояния можно перечислить: *S*1, *S*2, …, *Sn*.

Описать все возможные переходы между состояниями можно с помощью графа состояний.

**S1**

**S2**

**S4**

**S3**

Граф состояний представляет собой упорядоченный граф, вершинами которого являются возможные состояния *Si,* и между двумя состояниями существует ребро — стрелка, если возможен непосредственный переход между состояниями.

Например, магазин может пребывать в следующих состояниях:

*S*1 — имеются клиенты, которые обслуживаются;

*S*2 — клиентов нет;

*S*3  — осуществляется прием товара;

*S*4 — учет товара, который происходит иногда после его приема.

Тогда работу магазина можно описать графом состояний:

Для расчета основных характеристик системы необходимо знать вероятностные показатели при переходе между состояниями.

Рассмотрим 2 состояния *Si*и *Sj*. Интенсивностью переходного потока  называется среднее число переходов из состояния *Si* в состояние *Sj* за единицу времени, которое система проводит в состояние *Si*. Если известно среднее время *Tij*, которое система проводит в *Si* до того как перейдет в *Sj*, то можно записать: .

Интенсивности переходных потоков  указываются на графе состояний рядом с соответствующими стрелками. Главная задача в таких моделях состоит в определении вероятностей состояний ****, которые имеют смысл средней доли времени, которое система проводит в этом состоянии.

Для нахождения вероятностей состояний составляется система уравнений:

. (1)

Данную систему можно составлять по следующим правилам:

1. число уравнений в системе равно числу состояний;
2. каждое состояние *Sj* соответствует уравнению с номером *j*;
3. в левой части каждого уравнения находится сумма интенсивностей  (стоят над стрелками) для всех стрелок, входящих в состояние *Sj,* умноженных на вероятности состояний, из которых выходят стрелки;
4. в правой части уравнений находится сумма интенсивностей, выходящих из *Sj* стрелок, эта сумма умножается на вероятность *Pj*.

Однако система уравнений (1) является вырожденной, и для нахождения единственного решения в этой системе одно любое уравнение нужно заменить на условие нормировки

****.

***Пример 2***. Автоматизированная сборочная линия предприятия в среднем 1 раз в месяц выходит из строя и ремонтируется в среднем 3 дня. Кроме того, в среднем 2 раза в месяц она проходит техническое обслуживание, которое длится в среднем 1 день.
В среднем в одном случае из трех при техническом обслуживании обнаруживается неполадка, и линия ремонтируется. Определить, какую среднюю прибыль приносит линия за месяц, если за один день безотказной работы прибыль равна 15 тыс. р. Один день технической обработки обходится в 20 тыс. р., а один день ремонта — 30 тыс. р.

*Решение*. Найдем вероятности состояний, равные долям времени работы, ремонта и технического обслуживания. Пусть:

S1 — линия работает;

S2 — техническое обслуживание;

S3 — ремонт.

Граф состояний будет иметь вид:

20

2

 10

 10

 1

***S*1**

***S*2**

***S*3**

Составляем систему уравнений. В состояние *S*1 входят 2 стрелки: из *S*2 с интенсивностью 20 и из *S*3 с интенсивностью 10, поэтому левая часть первого уравнения имеет вид . Из состояния *S*1 выходят две стрелки с интенсивностями 2 и 1, поэтому правая часть первого уравнения системы примет вид . Аналогично, на основании состояний *S*2 и *S*3 составляем второе и третье уравнения. В результате система будет иметь вид:



Однако данная система является вырожденной, и для ее решения нужно заменить одно любое (например, первое) уравнение условием нормировки . В результате, получаем систему:



Выражаем из 1-го и 2-го уравнений *Р*1 и *Р*3 через *Р*2: , и подставляя результат в 3-е уравнение, находим:

, , . Умножаем вероятности на 30 дней месяца и находим, что в среднем в месяц линия работает 24,3 дня, техническое обслуживание — 1,6 дней, ремонт — 4,1 дня. Отсюда следует, что средняя прибыль будет 24,3⋅15 – 1,6⋅20 – 4,1⋅30 = 209,5 тыс. р.

***Пример 3***. В туристическом агентстве работает продавец и менеджер. В среднем в агентство приходят 2 клиента за час. Если продавец свободен, он обслуживает клиента, если – занят, то клиента обслуживает менеджер, если оба заняты — клиент уходит. Среднее время обслуживания продавцом 20 минут, менеджером — 30 минут. Каждый клиент приносит среднюю прибыль 100 рублей.

Определить среднюю прибыль агентства за 1 час и среднее число упущенных клиентов за час.

*Решение.* Определяем состояния системы:

*S*1 — продавец и менеджер свободны;

*S*2 — продавец занят, менеджер свободен;

*S*3 — продавец свободен, менеджер занят;

*S*4 — оба заняты.

Строим граф состояний

2

3

2

2

2

2

3

***S*1**

***S*4**

***S*3**

***S*2**

Составляем систему уравнений, заменяя 4-е уравнение условием нормировки:



Решая систему уравнений, находим:

.

Следовательно, продавец занимается обслуживанием *P2* + *P4* = 0,25 + 0,15 = 0,4, то есть 40 % времени. Если бы он обслуживал 100 % времени, то за час обслуживал бы 3-х клиентов, а реально: 3 × 0,4 = 1,2 и приносит прибыль за 1 час 120 рублей. Менеджер работает *P3* + *P4* = 0,11 + 0,15 = 0,26, т. е. 26 % времени и поэтому за час обслужит 2 × 0,26 = 0,52 клиента и принесет прибыль 52 рубля в час. Средняя прибыль за 1 час составит 172 рубля. Клиенты теряются в состоянии *S4*. Так как *P4* = 0,15, то в час теряется 15 % клиентов из 2-х возможных или 0,3 клиента. Убытки составляют
30 рублей в час из-за потерянных клиентов.

## **4. Процессы гибели и размножения**

Во многих экономических системах, в которых функционирует СП, возникают ситуации, когда из любого (кроме первого и последнего) состояния *Si* возможен переход только в соседние состояния *Si*+1 и *Si*-1. Такие процессы называются процессами гибели и размножения, и они описываются графом состояний

μ1

λ0

**S0**

μ2

λ1

**S1**

μ*i*+1

λ*i*

**S*i***

μ*n*

λ*n*-1

**S*n***

 μ*i*

 λ*i*-1

…

…

Интенсивности **** называются интенсивностями размножения, а *μi* — интенсивностями гибели. Для нахождения вероятности каждого состояния используются формулы:

,

, , …, .

***Пример 4.*** В автохозяйстве 5 автомобилей. Каждый из них в среднем 4 раза в год ломается, и ремонт длится в среднем
1 месяц. Определить, какую долю времени все автомобили исправны и среднее число исправных автомобилей в произвольный момент времени.

*Решение.* Вводим состояния системы:

S0 — все автомобили сломаны;

S1 — 1 автомобиль исправен;

S2 — 2 автомобиля исправны;

S3 — 3 автомобиля исправны;

S4 — 4 автомобиля исправны;

S5 — 5 автомобилей исправны.

Построим граф состояний и расставим переходные интенсивности. Например, для перехода из *S*1 в *S*0 имеем ситуацию: исправен 1 автомобиль, и он ломается,— это происходит 4 раза в год, т. е. интенсивность равна 4. Для перехода из *S*2 в *S*1: исправны 2 автомобиля и каждый из них ломается 4 раза в год, т. е. интенсивность равна 8. Остальные интенсивности гибели расставляются по аналогии.

Для перехода из *S*4 в *S*5 имеем ситуацию: неисправен 1 автомобиль, и он ремонтируется, — это длится 1 месяц или 12 раз в год, т. е. интенсивность равна 12. Для перехода из *S*3 в *S*4 имеем ситуацию: неисправны 2 автомобиля и каждый из них может быть отремонтирован с интенсивностью 12, т. е. общая интенсивность равна 24. Остальные интенсивности размножения расставляются по аналогии.

4

60

**S0**

8

48

**S1**

12

36

**S2**

16

24

**S3**

20

12

**S4**

**S5**

Вычисляем вероятности состояний, равные средней доле времени нахождения системы в этих состояниях.



;  = 0,088;  ;

; .

Все автомобили исправны в состоянии S5, средняя доля времени, когда автомобили исправны – 0,24. Среднее число исправных автомобилей находится как математическое ожидание:

.

***Пример 5.*** Организация принимает заявки от населения на проведение ремонтных работ. Заявки принимаются по телефону по двум линиям, и их обслуживают два диспетчера. Если одна линия занята, заявка автоматически переключается на вторую. Если обе линии заняты — заявка теряется. Среднее число обслуживания одной заявки — 6 минут. В среднем одна заявка приносит прибыль в 30 рублей. Какова прибыль за час? Целесообразно ли организовывать третий канал с третьим диспетчером, если его обслуживание обойдется в 150 рублей в час?

*Решение.* Рассмотрим сначала систему с двумя каналами.

Введем возможные состояния:

S0 — нет заявок (оба телефона свободны);

S1 — одна заявка обслуживается (один телефон занят);

S2 — две заявки обслуживаются (оба телефона заняты).

Граф состояний будет иметь вид

***S*0**

20

10

30

30

***S*1**

***S*2**

Применяя формулы для расчета вероятностей состояний, имеем:



В среднем за час теряется 54 % заявок или 0,54 × 30 = 16,2 заявки. Обслуживается 13,8 заявок в час и средняя прибыль 13,8 × 30 =
= 414 рублей.

Рассмотрим ситуацию с тремя линиями. Граф состояний при этом будет иметь вид

30

20

10

30

30

30

***S*0**

***S*1**

***S*2**

***S*3**

Находим вероятности состояний:

;



В среднем теряется 35 % заявок или 10,4 заявки в час. Обслуживается 19,6 заявок. Средняя прибыль — 588 рублей в час. Прибыль выросла на 174 р. При затратах 150 рублей третий канал обслуживания вводить целесообразно.

# **Часть 2. Моделирование бизнес-процессов с помощью теории массового обслуживания**

Многие экономические организации и системы, получающие прибыль за счет обслуживания клиентов, можно достаточно точно описать с помощью совокупности математических методов и моделей, которые получили название теории массового обслуживания (ТМО). Методы ТМО базируются на расчетах, основанных на случайных процессах, в частности, на процессах гибели и размножения. Рассмотрим основные аспекты ТМО.

## **1. Классификация моделей массового обслуживания**

*Системы массового обслуживания* (СМО) — это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

С позиции моделирования процесса массового обслуживания ситуации, когда образуются очереди заявок (требований) на обслуживание, возникают следующим образом. Поступив в обслуживающую систему, требование присоединяется к очереди других (ранее поступивших) требований. Канал обслуживания выбирает требование из находящихся в очереди, с тем, чтобы приступить к его обслуживанию. После завершения процедуры обслуживания очередного требования канал обслуживания приступает к обслуживанию следующего требования, если таковое имеется в блоке ожидания.

Цикл функционирования системы массового обслуживания подобного рода повторяется многократно в течение всего периода работы обслуживающей системы. При этом предполагается, что переход системы на обслуживание очередного требования после завершения обслуживания предыдущего требования происходит мгновенно, в случайные моменты времени.

Примерами систем массового обслуживания могут служить:

* магазины;
* банки;
* ремонтные мастерские;
* почтовые отделения;
* посты технического обслуживания автомобилей, посты ремонта автомобилей;
* персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;
* аудиторские фирмы;
* отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий;
* телефонные станции и т. д.

*Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:*

* входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;
* дисциплина очереди;
* механизм обслуживания.

Раскроем содержание каждого из указанных выше компонентов.

***Входной поток требований.***Для описания входного потока требуется задать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание и указать количество таких требований в каждом очередном поступлении. При этом, как правило, оперируют понятием «вероятностное распределение моментов поступления требований». Здесь могут поступать как единичные, так и групповые требования (требования поступают группами в систему). В последнем случае обычно речь идет о системе обслуживания с параллельно-групповым обслуживанием.

**Дисциплина очереди** — это важный компонент системы массового обслуживания, он определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания. Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:

* первым пришел — первый обслуживаешься;
* пришел последним — обслуживаешься первым;
* случайный отбор заявок;
* отбор заявок по критерию приоритетности;
* ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая длина очереди»).

***Механизм обслуживания***определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы. К характеристикам процедуры обслуживания относятся: продолжительность процедуры обслуживания и количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процедуры. Для аналитического описания характеристик процедуры обслуживания оперируют понятием «вероятностное распределение времени обслуживания требований».

Следует отметить, что время обслуживания заявки зависит от характера самой заявки или требований клиента и от состояния и возможностей обслуживающей системы. В ряде случаев приходится также учитывать вероятность выхода обслуживающего прибора по истечении некоторого ограниченного интервала времени.

Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимным расположением каналов обслуживания (механизмов, приборов и т. п.). Прежде всего следует подчеркнуть, что система обслуживания может иметь не один канал обслуживания, а несколько; система такого рода способна обслуживать одновременно несколько требований. В этом случае все каналы обслуживания предлагают одни и те же услуги, и, следовательно, можно утверждать, что имеет место параллельное обслуживание.

Система обслуживания может состоять из нескольких разнотипных каналов обслуживания, через которые должно пройти каждое обслуживаемое требование, т. е. в обслуживающей системе процедуры обслуживания требований реализуются последовательно. Механизм обслуживания определяет характеристики выходящего (обслуженного) потока требований.

Рассмотрев основные компоненты систем обслуживания, можно констатировать, что *функциональные возможности любой системы массового обслуживания определяются следующими основными факторами:*

* вероятностным распределением моментов поступлений заявок на обслуживание (единичных или групповых);
* вероятностным распределением времени продолжительности обслуживания;
* конфигурацией обслуживающей системы (параллельное, последовательное или параллельно-последовательное обслуживание);
* количеством и производительностью обслуживающих каналов;
* дисциплиной очереди;
* мощностью источника требований.

*В качестве основных критериев эффективности функционирования систем массового обслуживания в зависимости от характера решаемой задачи могут выступать:*

* вероятность немедленного обслуживания поступившей заявки;
* вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки;
* относительная и абсолютная пропускная способность системы;
* средний процент заявок, получивших отказ в обслуживании;
* среднее время ожидания в очереди;
* средняя длина очереди;
* средний доход от функционирования системы в единицу времени и т. п.

*Предметом теории массового обслуживания* является установление зависимости между факторами, определяющими функциональные возможности системы массового обслуживания, и эффективностью ее функционирования. В большинстве случаев все параметры, описывающие системы массового обслуживания, являются случайными величинами или функциями, поэтому эти системы относятся к стохастическим системам.

*Независимо от характера процесса, протекающего в системе массового обслуживания, различают два основных вида СМО:*

* системы с отказами, в которых заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и сразу же покидает очередь;
* системы с ожиданием (очередью), в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов.

Системы массового обслуживания с ожиданием делятся на системы с ограниченным ожиданием и системы с неограниченным ожиданием.

В системах с ограниченным ожиданиемможет ограничиваться:

* длина очереди;
* время пребывания в очереди.

В системах с неограниченным ожиданиемзаявка, стоящая в очереди, ждет обслуживания неограниченно долго, т. е. пока не подойдет очередь.

*Все системы массового обслуживания различают по числу каналов обслуживания:*

* одноканальные системы;
* многоканальные системы.

Приведенная классификация СМО является условной. На практике чаще всего системы массового обслуживания выступают в качестве смешанных систем. Например, заявки ожидают начала обслуживания до определенного момента, после чего система начинает работать как система с отказами.

Определим характеристики систем массового обслуживания.

## **2. Одноканальная СМО с отказами**

*Простейшей одноканальной моделью* с вероятностными входным потоком и процедурой обслуживания является модель, характеризуемая показательным распределением как длительностей интервалов между поступлениями требований, так и длительностей обслуживания. При этом плотность распределения длительностей интервалов между поступлениями требований имеет вид



где *λ* — интенсивность поступления заявок в систему (среднее число заявок, поступающих в систему за единицу времени).

Плотность распределения длительностей обслуживания

,

где  — интенсивность обслуживания;

*tоб* — среднее время обслуживания одного клиента.

Пусть система работает с отказами. Можно определить абсолютную и относительную пропускную способность системы.

Относительная пропускная способность равна доле обслуженных заявок относительно всех поступающих и вычисляется по формуле . Эта величина равна вероятности Р0 того, что канал обслуживания свободен.

Абсолютная пропускная способность А — среднее число заявок, которое может обслужить система массового обслуживания в единицу времени .

Вероятность отказа в обслуживании заявки будет равна вероятности состояния «канал обслуживания занят»

.

Данная величина Ротк может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

**Пример 1.**Пусть одноканальная СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей. Заявка — автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, — получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ = 1,0 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания — tоб = 1,8 часа.

Требуется определить в установившемся режиме предельные значения:

*q* — относительной пропускной способности;

*А* — абсолютной пропускной способности;

*Ротк* — вероятности отказа.

Сравнить фактическую пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, если бы каждый автомобиль обслуживался точно 1,8 часа и автомобили следовали один за другим без перерыва.

Решение. Определим интенсивность потока обслуживания

.

Вычислим относительную пропускную способность

*q* =.

Величина *q* означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 35 % прибывающих на пост автомобилей.

Абсолютную пропускную способность определим по формулеА = λ q = 1 × 0,356 = 0,356.

Это означает, что система способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

Вероятность отказа *Ротк* = 1 – *q*= 1 – 0,356 = 0,644.

Это означает, что около 65 % прибывших автомобилей на пост ЕО получат отказ в обслуживании.

Определим номинальную пропускную способность системы

А*ном* =  (автомобилей в час).

Оказывается, что *Аном* в  раза больше, чем фактическая пропускная способность, вычисленная с учетом случайного характера потока заявок и времени обслуживания.

## **3. Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью**

Рассмотрим теперь одноканальную СМО с ожиданием. Система массового обслуживания имеет один канал. Входящий поток заявок на обслуживание имеет интенсивность *λ*. Интенсивность потока обслуживания равна *μ* (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать *μ* обслуженных заявок). Длительность обслуживания — случайная величина, подчиненная показательному закону распределения. Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания.

Рассмотрим систему с *ограниченной очередью*. Предположим, что независимо от того, сколько требований поступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые клиенты) не может вместить более *N*-требований (заявок), из которых одна обслуживается, а (*N*– 1) ожидают. Клиенты, не попавшие в ожидание, вынуждены обслуживаться в другом месте, и такие заявки теряются. Наконец, источник, порождающий заявки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно большую) емкость.

Обозначим  — вероятность того, что в системе находится *n* заявок. Эта величина вычисляется по формуле:



Здесь  — приведенная интенсивность потока. Тогда вероятность того, что канал обслуживания свободен и в системе нет ни одного клиента, равна .

С учетом этого можно обозначить:



Определим характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (*N* – 1):

*вероятность отказа в обслуживании заявки:*

*Pотк = РN = *

*относительная пропускная способность системы:*

**

*абсолютная пропускная способность:*

*А = q λ;*

*среднее число находящихся в системе заявок:*

**

*среднее время пребывания заявки в системе:*

**;

*средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в очереди*

*Wq* = *Ws —* 1/*μ*;

*среднее число заявок (клиентов) в очереди (длина очереди)*

*Lq* = λ (1 – *PN*)*Wq*.

Рассмотрим пример одноканальной СМО с ожиданием.

***Пример 2.*** Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведения диагностики, ограничено и равно 3, то есть (*N*— 1) = 3. Если все стоянки заняты, т. е. в очереди уже находятся три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на диагностику, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывающих на диагностику, имеет интенсивность *λ*= 0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля распределено по показательному закону и в среднем равно  = 1,05 ч.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

*Решение.* Интенсивность потока обслуживания автомобилей

**

Приведенная интенсивность потока автомобилей определяется как отношение интенсивностей *λ* и *μ*, т. е.

**

Вычислим вероятности нахождения *п* заявок в системе:



*P*1 = *ρ* *P*0 = 0,893 × 0,248 = 0,221;

*P*2 = *ρ*2 *P*0 = 0,8932 × 0,248 = 0,198;

*P*3 = *ρ*3 *P*0 = 0,8933 × 0,248 = 0,177;

*P*4 = *ρ*4 *P*0 = 0,8934 × 0,248 = 0,158.

Вероятность отказа в обслуживании автомобиля

*Pотк* = *Р*4 = *ρ*4 *P*0 ≈ 0,158.

Относительная пропускная способность поста диагностики

*q* = 1 – *Pотк* = 1 – 0,158 = 0,842.

Абсолютная пропускная способность поста диагностики

*А* = *λ q* = 0,85 × 0,842 = 0,716 (автомобиля в час).

Среднее число автомобилей, находящихся на обслуживании и в очереди (т. е. в системе массового обслуживания)





Среднее время пребывания автомобиля в системе

 ч.

Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди на обслуживание

*Wq* = *Ws –* 1/*μ* = 2,473 – 1/0,952 = 1,423 ч.

Среднее число заявок в очереди (длина очереди)

*Lq = λ*(1 *– PN) Wq  =* 0,85 (1 – 0,158) 1,423 = 1,02*.*

Работу рассмотренного поста диагностики можно считать удовлетворительной, так как пост диагностики не обнаруживает автомобили в среднем в 15,8 % случаев (*Ротк* = 0,158).

## **4. Одноканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью**

Перейдем теперь к рассмотрению *одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания*(т. е. *Ν* → ∞). Остальные условия функционирования СМО остаются без изменений.

Устойчивое решение в такой системе существует только тогда, когда *λ* < *μ*, то есть заявки должны обслуживаться с большей скоростью, чем поступают, в противном случае очередь может разрастись до бесконечности.

Вероятность того, что в системе находится *п* заявок, вычисляется по формуле

*Pn* = (1 – *ρ*)*ρn*, *n* = 0, 1, 2, …, *N*,

где *ρ* = *λ*/*μ* < 1.

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди, следующие:

*среднее число находящихся в системе клиентов (заявок) на обслуживание*

**

*средняя продолжительность пребывания клиента в системе*

;

*среднее число клиентов в очереди на обслуживание*

*Lq* = *LS – *;

*средняя продолжительность пребывания клиента в очереди*

*Wq = *.

***Пример 3.*** Вспомним о ситуации, рассмотренной в предыдущем примере, где речь идет о функционировании поста диагностики. Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывающих на обслуживание автомобилей, т. е. длина очереди не ограничена.

Требуется определить финальные значения следующих вероятностных характеристик:

* вероятности состояний системы (поста диагностики);
* среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди);
* среднюю продолжительность пребывания автомобиля в системе (на обслуживании и в очереди);
* среднее число автомобилей в очереди на обслуживании;
* среднюю продолжительность пребывания автомобиля в очереди.

###### *Решение.* Параметр потока обслуживания *μ* и приведенная интенсивность потока автомобилей *ρ* определены в предыдущем примере:

*μ* = 0,952; *ρ* = 0,893.

Вычислим предельные вероятности системы по формулам:

*P*0 = 1 – *ρ* = 1 – 0,893 = 0,107;

*P*1 = (1 – *ρ*) *ρ* = (1 – 0,893) 0,893 = 0,096;

*P*2 = (1 – *ρ*) *ρ*2 = (1 – 0,893) 0,8932 = 0,085;

*P*3 = (1 – *ρ*) *ρ*3 = (1 – 0,893) 0,8933 = 0,076;

*P*4 = (1 – *ρ*) *ρ*4 = (1 – 0,893) 0,8934 = 0,068;

*P*5 = (1 – *ρ*) *ρ*5 = (1 – 0,893) 0,8935 = 0,061 и т. д.

Следует отметить, что *Р*0 определяет долю времени, в течение которого пост диагностики вынужденно бездействует (простаивает). В нашем примере она составляет 10,7 %, так как *Р0* = 0,107.

Среднее число автомобилей, находящихся в системе (на обслуживании и в очереди)

 ед.

Средняя продолжительность пребывания клиента в системе

 ч.

Среднее число автомобилей в очереди на обслуживание

.

Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди

ч.

Относительная пропускная способность системы равна единице, так как все поступившие заявки рано или поздно будут обслужены *q* = 1.

Абсолютная пропускная способность

*A* = λ *q* = 0,85 × 1 = 0,85.

Следует отметить, что предприятие, осуществляющее диагностику автомобилей, прежде всего интересует количество клиентов, которое посетит пост диагностики при снятии ограничения на длину очереди.

Допустим, в первоначальном варианте количество мест для стоянки прибывших автомобилей, как в предыдущем примере, было равно трем. Частота *m* возникновения ситуаций, когда у прибывающего на пост диагностики автомобиля нет возможности присоединиться к очереди: *m* = λ *PN.*

В нашем примере при *N* = 3 + 1 = 4 и ρ = 0,893,

*m* = λ *P*0 ρ4 = 0,85 × 0,248 × 0,8934 = 0,134 автомобиля в час.

При 12-часовом режиме работы поста диагностики это эквивалентно тому, что пост диагностики в среднем за смену (день) будет терять 12 × 0,134 = 1,6 автомобиля.

Снятие ограничения на длину очереди позволяет увеличить количество обслуживаемых клиентов в нашем примере в среднем на 1,6 автомобиля за смену (12 ч. работы) работы поста диагностики. Ясно, что решение относительно расширения площади для стоянки автомобилей, прибывающих на пост диагностики, должно основываться на оценке экономического ущерба, который обусловлен потерей клиентов при наличии всего трех мест для стоянки этих автомобилей.

## **5. Многоканальная СМО с отказами**

В подавляющем большинстве случаев на практике системы массового обслуживания являются многоканальными, то есть параллельно могут обслуживаться несколько заявок, и, следовательно**,** *модели с обслуживающими каналами* (где число каналов обслуживания *n* > 1) представляют несомненный интерес.

Процесс массового обслуживания, описываемый данной моделью, характеризуется интенсивностью входного потока *λ*, при этом параллельно может обслуживаться не более *n* клиентов (заявок). Средняя продолжительность обслуживания одной заявки равняется 1/*μ*. Режим функционирования того или иного обслуживающего канала не влияет на режим функционирования других обслуживающих каналов системы, причем длительность процедуры обслуживания каждым из каналов является случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону распределения. Конечная цель использования параллельно включенных обслуживающих каналов заключается в повышении (по сравнению с одноканальной системой) скорости обслуживания требований за счет обслуживания одновременно *n* клиентов.

Стационарное решение системы имеет вид

;

где , .

Формулы для вычисления вероятностей называются *формулами Эрланга.*

Определим вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме:

*вероятность отказа:*

,

так как заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все каналы заняты. Величина *Ротк* характеризует полноту обслуживания входящего потока;

*вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию* (она же — относительная пропускная способность системы) дополняет *Ротк* до единицы

;

*абсолютная пропускная способность*

;

*среднее число каналов, занятых обслуживанием* (), следующее:

.

Величина  характеризует степень загрузки СМО.

***Пример 4.*** Пусть *n*-канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя (*n* = 3) взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность *λ* = 1 задача в час. Средняя продолжительность обслуживания *tоб* = 1,8 ч.

Требуется вычислить значения:

* вероятности числа занятых каналов ВЦ;
* вероятности отказа в обслуживании заявки;
* относительной пропускной способности ВЦ;
* абсолютной пропускной способности ВЦ;
* среднего числа занятых ПЭВМ на ВЦ.

Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

*Решение.*Определим параметр μ потока обслуживаний:

.

Приведенная интенсивность потока заявок

.

Предельные вероятности состояний найдем по формулам Эрланга:



Вероятность отказа в обслуживании заявки .

Относительная пропускная способность ВЦ

.

Абсолютная пропускная способность ВЦ:

.

Среднее число занятых каналов — ПЭВМ

.

Таким образом, при установившемся режиме работы СМО в среднем будет занято 1,5 компьютера из трех – остальные полтора будут простаивать. Работу рассмотренного ВЦ вряд ли можно считать удовлетворительной, так как центр не обслуживает заявки в среднем в 18 % случаев (*Р3* = 0,180). Очевидно, что пропускную способность ВЦ при данных *λ* и *μ* можно увеличить только за счет увеличения числа ПЭВМ.

Определим, сколько нужно использовать ПЭВМ, чтобы сократить число необслуженных заявок, поступающих на ВЦ, в 10 раз, т. е. чтобы вероятность отказа в решении задач не превосходила 0,0180. Для этого используем формулу вероятности отказа:

.

Составим следующую таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *P*0 | 0,357 | 0,226 | 0,186 | 0,172 | 0,167 | 0,166 |
| *Pотк* | 0,673 | 0,367 | 0,18 | 0,075 | 0,026 | 0,0078 |

Анализируя данные таблицы, следует отметить, что расширение числа каналов ВЦ при данных значениях *λ* и *μ* до 6 единиц ПЭВМ позволит обеспечить удовлетворение заявок на решение задач на 99,22 %, так как при *n* = 6 вероятность отказа в обслуживании (*Ротк*) составляет 0,0078.

## **6. Многоканальная СМО с ожиданием**

Рассмотрим многоканальную систему массового обслуживания с ожиданием. Процесс массового обслуживания при этом характеризуется следующим: входной и выходной потоки имеют интенсивности *λ* и *μ* соответственно, параллельно обслуживаться могут не более *С* клиентов, то есть система имеет *С* каналов обслуживания. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента равна .

Вероятность того, что в системе находятся *п* заявок (*С* обслуживаются, остальные ожидают в очереди) равна:



где

.

Решение будет действительным, если выполняется следующее условие: 

Остальные вероятностные характеристики функционирования в стационарном режиме многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью определяются по следующим формулам:

*среднее число клиентов в очереди на обслуживание*

;

*среднее число находящихся в системе клиентов* (заявок на обслуживание и в очереди)

*LS* = *Lq* + *ρ*;

*средняя продолжительность пребывания клиента* (заявки на обслуживание) *в очереди*

;

*средняя продолжительность пребывания клиента в системе*

**.

Рассмотрим примеры многоканальной системы массового обслуживания с ожиданием.

***Пример 5.*** Механическая мастерская завода с тремя постами (каналами) выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывающих в мастерскую, — пуассоновский и имеет интенсивность *λ* = 2,5 механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма распределено по показательному закону и равно *tоб* = 0,5 сут. Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь механизмов перед мастерской может расти практически неограниченно.

Требуется вычислить следующие предельные значения вероятностных характеристик системы:

* вероятность состояний системы;
* среднее число заявок в очереди на обслуживание;
* среднее число находящихся в системе заявок;
* среднюю продолжительность пребывания заявки в очереди;
* среднюю продолжительность пребывания заявки в системе.

*Решение.* Определим параметр потока обслуживаний:



Приведенная интенсивность потока заявок:

*ρ* = *λ*/*μ* = 2,5/2,0 = 1,25; при этом λ/(μ × *с*)= 2,5/(2 × 3) = 0,41 < 1.

Поскольку λ/(μ × *с*) < 1, то очередь не растет безгранично, и в системе наступает предельный стационарный режим работы. Вычислим вероятности состояний системы:







Вероятность отсутствия очереди у мастерской

Ротк  ≈ *Р*0 + *Р*1 + *Р*2 + *Р*3 ≈ 0,279 + 0,394 + 0,218 + 0,091 = 0,937.

Среднее число заявок в очереди на обслуживание



Среднее число находящихся в системе заявок

*Ls* = *Lq* +  = 0,111 + 1,25 = 1,361.

Средняя продолжительность пребывания механизма в очереди на обслуживание

 суток.

Средняя продолжительность пребывания механизма в мастерской (в системе)  суток.

**Примеры решения задач на ЭВМ в среде MS Excel**

1. **Моделирование экономических систем**

**с помощью случайных процессов**

 **Пример.** Центральный пульт управления лаборатории обрабатывает поступающие запросы с помощью Супер-ЭВМ. Периодически, в среднем 5 раз в месяц ЭВМ проходит тестирование, которое продолжается в среднем 1 день. В результате такого тестирования в среднем в 2-х случаях из 5-и обнаруживаются проблемы, которые требуют перенастройки ЭВМ, которая длится в среднем 1 день. Кроме того, в среднем 2 раза в месяц ЭВМ производит сбой и требуется перенастройка. После перенастройки в 50 % случаев требуется ремонт, который длится в среднем 3 дня. Необходимо определить сколько в среднем дней в месяц ЭВМ работает, тестируется, перенастраивается и ремонтируется. Сколько нужно времени в среднем тратить на ремонт, чтобы ЭВМ в рабочем состоянии в среднем находилась 70 % времени?

 Введем состояния: *S*1 – ЭВМ работает; *S*2 – ЭВМ тестируется; *S*3 – ЭВМ перенастраивается; *S*4 – ЭВМ в ремонте. Построим граф состояний. Для этого находим интенсивности переходных вероятностей. Возьмем за единицу времени один месяц. Тогда тестирование проводится по условию задачи 5 раз в месяц, поэтому указываем над стрелкой между 1-м и 2-м состоянием интенсивность 5. Тестирование длится 1 день, то есть 30 раз в месяц. При этом, в 2-х случаях их 5-и, то есть в 12-и случаях из 30-и обнаруживается неисправность и требуется перенастройка, а в 18-ти случаях, соответственно производится возврат в рабочее состояние. По этой причине, ставим над стрелкой 2→3 интенсивность 12, а над стрелкой 2→1 интенсивность 18. Перенастройка длится также 1 день, то есть 30 раз в месяц, в половине случаев происходит выход в рабочее состояние, в половине в ремонт. Поэтому над 3→1 и 3→4 ставим по 15. Ремонт длится 3 дня, это 10 раз в месяц, над 4→1 ставим 10. Построим теперь матрицу переходных интенсивностей, которая полностью описывает граф состояний. Если из состояния с номером *i* в состояние с номером *j* идет стрелка с интенсивностью , то в *i*-й строке и *j*-м столбце будет стоять эта интенсивность . Если между состояниями перехода нет, то в соответствующей позиции матрицы стоит ноль. Для данной задачи матрица переходных интенсивностей имеет вид:

S1

S2

S3

S4

5

12

18

2

10

15

15



 Открываем электронную таблицу EXCEL. В ячейки А1 и Е1 делаем подписи «Матрица транспонированная» и «Столбец». В диапазон А2-D5 вводим транспонированную матрицу переходных вероятностей, то есть первый столбец вводится первой строкой, второй столбец это вторая строка и т.д. В столбец Е2-Е5, число ячеек которого равно размеру матрицы, всегда вводятся нули. Также подготовим подписи для обратной матрицы и вывода результата (см. рисунок).



 На втором этапе необходимо в транспонированную матрицу ***на место диагональных элементов ввести сумму всех остальных элементов данного столбца со знаком «минус».*** Для этого в А2 вводим «**=-СУММ(A3:A5)**» (здесь и далее кавычки не надо). В ячейку В3 вводим «**=-B2-B4-B5**», в С4 вводим «**=-C2-C3-C5**», в D5 вводим «**=-СУММ(D2:D4)**». Полученная матрица будет вырожденной и для получения единственного решения системы уравнений нужно одно любое уравнение заменить условием нормировки , которому будет соответствовать строка из единиц в расширенной матрице. Вводим во все ячейки диапазона А6-Е6 числа «1».

 На третьем этапе находим обратную матрицу. Ставим курсор в ячейку F3 и вызываем мастер функций кнопкой *fx*, в категории «Математические» выбираем функцию МОБР. Ставим курсор в поле «Массив» и задаем ссылку на расширенную матрицу, исключая первую строку и последний столбец, обводя мышкой ячейки от A3 до D6, нажимаем «ОК». Обводим мышкой 4 строки и 4 столбца, то есть ячейки от F3 до I6, нажимаем F2 а затем одновременно Ctrl+Shift+Enter. Находим результат решения задачи – вероятности состояний, матрица которых есть результат перемножения обратной матрицы и столбца свободных членов системы уравнений. Ставим курсор в K3, вызываем мастер функций и в категории «Математические» выбираем функцию МУМНОЖ. В поле «Массив 1» даем ссылку на диапазон ячеек от F3 до I6, обводя эти ячейки. В поле «Массив 2» даем ссылку на диапазон ячеек от E3 до E6. Видим, что функция выдает только одно значение: 0,66667. Для вывода всего массива обводим данную ячейку и три ниже К3-К6, выделяя их, нажимаем F2 а затем одновременно Ctrl+Shift+Enter. В результате получаем вероятности состояний:

.

 Умножив эти вероятности на 30 дней можно рассчитать, сколько дней в среднем в месяц система находится в каждом состоянии: ЭВМ работает 0,667⋅30 = 20 дней, ЭВМ тестируется 0,111⋅30 = 3,33 дня, ЭВМ перенастраивается 0,089⋅30 = 2,67 дней, ЭВМ в ремонте 0,133⋅30 = 4 дня.

 Ответим теперь на второй вопрос: сколько нужно времени в среднем тратить на ремонт, чтобы ЭВМ в рабочем состоянии в среднем находилась 70 % времени? Ставим курсор в любой свободной ячейке и выбираем пункт меню «Сервис», а в нем подменю «Подбор параметра». В открывшемся окне в поле «Установить в ячейке» даем ссылку на ячейку К3, соответствующую доли времени нахождения ЭВМ в рабочем состоянии. Затем вводим в поле «Значение» число «0,7», а в поле «Изменяя значение ячейки» даем ссылку на D2 (ставим курсор в данное поле и щелкаем мышкой по D2). Нажимаем ОК и видим в D2 результат 15,46, что означает, что ремонт должен продолжаться 30/15,46=1,94 дня.

**Процессы гибели и размножения**

 Во многих экономических системах, в которых функционирует случайный процесс, возникают ситуации, когда возможен переход из любого состояния S*i* в соседние состояния S*i*+1 и S*i*-1. такие процессы называются процессами гибели и размножения и они описываются графом состояний вида:

μ1

λ0

S0

μ2

λ1

S1

μ*i*+1

λ*i*

S*i*

μ*n*

λ*n*-1

S*n*

…

 μ*i*

 λ*i*-1

…

 Интенсивности **** называются интенсивностями размножения, а μ*i* – интенсивности гибели. Для нахождения вероятности каждого состояния используются формулы:

; (1)

; ; … . (2)

 **Пример.** В автохозяйстве 5 автомобилей. Каждый из них в среднем 4 раза в год ломается и ремонт длиться с среднем 1 месяц. Определить, какую долю времени *i* автомобилей исправны () и среднее число исправных автомобилей в произвольный момент времени.

 Введем следующие состояния: S0 – все автомобили сломаны; S1 – один исправен; S2 – 2 исправны; S3 – 3 исправны; S4 – 4 исправны; S5 – все автомобили исправны. Граф состояний будет иметь вид:

S0

60

4

S1

48

8

S2

36

12

S3

24

16

S4

12

20

S5

 Переходим на новый лист Excel и вводим исходные данные в соответствии с рисунком.



Для расчета суммы в знаменателе формулы (1) выделим строку для промежуточных вычислений. Вводим в А7 цифру 1, а в соседнюю В7 вводим формулу **=A7\*B2/B3**. Автозаполняем результат на ячейки В7-F7. Для расчета вероятности P0 по формуле (1) вводим в ячейку В5 формулу **=1/СУММ(A7:F7)**. Для расчета других вероятностей по формулам (2) вводим в С5 формулу **=B5\*B2/B3** и автозаполняем результат на ячейки С5-G5. Полученные в ячейках В5-G5 числа и есть доли времени того, что *i* автомобилей исправны.

Для расчета среднего числа исправных автомобилей в произвольный момент времени ставим курсор в любую свободную ячейку и вводим формулу **=0\*B5+1\*C5+2\*D5+3\*E5+4\*F5+5\*G5**. Результат – 3,75. Задача решена.

**2. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

**1. Одноканальная СМО с ограниченной очередью**

Предположим, что система массового обслуживания имеет один канал обслуживания. Входящий поток заявок на обслуживание имеет интенсивность λ. Интенсивность потока обслуживания равна μ (т. е. в среднем непрерывно занятый канал будет выдавать μ обслуженных за­явок). Заявка, поступившая в момент, когда канал занят, становится в очередь и ожидает обслуживания. Рассмотрим систему с ограниченной очередью. Предположим, что независимо от того, сколько требований по­ступает на вход обслуживающей системы, данная система (очередь + обслуживаемые клиенты) не может вместить более N-требований (заявок), из которых одна обслуживается, а (N-1) ожидают, Клиенты, не попавшие в ожидание, вынуждены об­служиваться в другом месте и такие заявки теряются. Наконец, источник, порождающий за­явки на обслуживание, имеет неограниченную (бесконечно боль­шую) емкость.

Обозначим  - вероятность того, что в системе находится *k* заявок. Эта величина вычисляется по формуле:

, где  . (1)

 Рассмотрим данную модель на примере.

**Пример:** На станции техобслуживания в ГИБДД имеется одна компьютерная станция диагностики, проверяющая в рамках технического осмотра автомобилей их ходовые характеристики. В среднем за час на станцию пребывает λ=20 автомобилей. Среднее время обслуживания автомобиля 2 минуты. В случае если станция диагностики занята, имеется стоянка для ожидания, рассчитанная на 19 мест (плюс одно для обслуживания). Если все места заняты, то вновь прибывающие автомобили не обслуживаются и заявки теряются.

а) Определить вероятности  того, что в системе будут находиться k автомобилей (k =0,1,…,20).

б) Проанализировать зависимость вероятности нахождения в системе k автомобилей  от времени обслуживания автомобиля

 Открываем электронную книгу EXCEL. Ставим курсор в ячейку А1 и вводим подпись: «Одноканальная СМО с ограниченной очередью». Входящий поток имеет интенсивность λ=20. В ячейку А2 вводим подпись «лямбда=», а в соседнюю ячейку В2 вводим число 20. Так, как автомобили обслуживаются 2 минуты, то в среднем за час в среднем будет обслужено μ=30 автомобилей. Вводим в А3 подпись «Мю=», а в В3 число 30. Далее рассчитываем параметр . Вводим в А4 подпись «Ро=», а в В4 формулу **=B2/B3**. Так как система может содержать в себе максимум 20 автомобилей, то *N*=20. Вводим в А5 подпись «N=», а в В5 число 20.

Рассчитаем теперь по формуле (1) зависимости вероятностей  того, что в системе будет находиться *k* автомобилей от числа автомобилей *k*, которое может принимать значения от 0 до 20. Для этого вводим в D2 подпись «k=», а в Е2 подпись «Pk=». В ячейки D3-D23 вводим целые числа от 0, 1, 2 и так до 20. В Е3 вводим формулу (1) в виде:

**=(1-$B$4)/(1-СТЕПЕНЬ($B$4;$B$5+1))\*СТЕПЕНЬ($B$4;D3).**

Автозаполнением переносим формулу на ячейки Е3-Е23. Построим по полученным данным график зависимости вероятности того, что в системе будет *k* автомобилей. Для этого ставим курсор в любую свободную ячейку и вызываем мастер диаграмм, выбирая в меню «ВСТАВКА» пункт «ДИАГРАММА». Выбираем тип диаграммы «График», нажимаем «Далее». Ставим курсор в поле «Диапазон» и обводим мышкой ячейки от Е3 до Е23. Переходим на закладку «Ряд», ставим курсор в поле «Подписи оси Х» и обводим ячейки от D3 до D23, нажимаем «Далее». В поле «Ось Х (категорий)» вводим текст «Число автомобилей», в поле «Ось Y (значений)» вводим текст «Вероятность», нажимаем «Готово». График построен.

Исследуем теперь зависимость вероятности нахождения в системе k автомобилей от времени обслуживания автомобиля, то есть от параметра μ. Возьмем для определенности k=5. Вводим в А6 подпись «К=», а в соседнюю ячейку В6 вводим 5. Зададим разные значения параметра μ. Вводим в F2 подпись «Мю=», а в ячейки F3-F22 значения 21, 22, …, 40. Рассчитаем теперь параметр . Вводим в G2 подпись «Ро=», а в ячейку G3 формулу **=$B$2/F3**. Автозаполняем этой формулой ячейки от G3 до G22. Находим далее вероятность  по формуле (1). Вводим в ячейку Н2 подпись «Вероятность», а в Н3 формулу **=(1-G3)/(1-СТЕПЕНЬ(G3;$B$5+1))\*СТЕПЕНЬ(G3;$B$6).**

Автозаполняем формулу на ячейки Н3-Н22. Построим по полученным данным график. Для этого ставим курсор в любую свободную ячейку и вызываем мастер диаграмм (ВСТАВКА/ДИАГРАММА). Выбираем тип диаграммы «График», нажимаем «Далее». Ставим курсор в поле «Диапазон» и обводим мышкой ячейки от Н3 до Н22. Переходим на закладку «Ряд», ставим курсор в поле «Подписи оси Х» и обводим ячейки от F3 до F22, нажимаем «Далее». В поле «Ось Х (категорий)» вводим текст «Скорость обслуживания», в поле «Ось Y (значений)» вводим текст «Вероятность», нажимаем «Готово». График построен.

**2. Одноканальная СМО с неограниченной очередью**

Перейдем теперь к рассмотрению одноканальной СМО с ожиданием без ограничения на вместимость блока ожидания (т.е. Ν → ∞ ). Остальные условия функционирования СМО остаются без изменений.

Устойчивое решение в такой системе существует только тогда, когда λ<μ, то есть заявки должны обслуживаться с большей скоростью, чем поступают, в противном случае очередь может разрастись до бесконечности.

Вероятность того, что в системе находится k заявок, вычисляется по формуле:

*Pk*=(1-ρ)⋅ρ*k*, *k*=0,1,2,… (2)

**Задание 2.** Предположим теперь, что в условиях предыдущего примера длина очереди на обслуживание автомобилей не ограничена. Определить вероятности  того, что в системе будут находиться k автомобилей (k =0,1,…,20).

Проанализировать зависимость вероятности нахождения в системе k автомобилей  от времени обслуживания автомобиля

***Указания.*** Для выполнения задания перейти на новый лист Excel, в ячейку А1 вводим подпись: «Одноканальная СМО с неограниченной очередью», ячейки А2, А3, А4, А6, В2, В3, В4, В6, D2-D23, E2, F2-F22, G2-G22, H2 заполнить так же как и в предыдущем примере. Для ввода формулы (2) в Е3 вводим формулу

 **=(1-$B$4)\*СТЕПЕНЬ($B$4;D3)**, а в Н3 вводим формулу

 **=(1-G3)\*СТЕПЕНЬ(G3;$B$6)**, автозаполняем результаты, строим по полученным данным графики. Меняем параметр k и делаем вывод о его влиянии на вид графика.

**3. Многоканальная СМО с неограниченной очередью**

Рассмотрим ситуацию, когда в условиях предыдущего примера на станции техобслуживания открыли вторую компьютерную станцию диагностики. Такая ситуация будет описываться многоканальной (двухканальной) моделью СМО. Вероятности того, что в системе находятся k заявок (2 обслуживаются, остальные ожидают в очереди), для случая наличия очереди равны:

 (3)

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Кремер Н.Ш. и др. Исследование операций в экономике. - M.: ЮНИТИ, 1997.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций.- М.:Сов. радио, 1972.
3. Бережная Е.В., Бережной В.И., Математические методы моделирования экономических систем. Учеб. пособие.- М.:Финансы и статистика, 2001.
4. Таха X. Введение в исследование операций. В 2-х томах. — M.: Мир**,** 1985.
5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
6. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. – М.: Изд-во УРАО, 1998.
7. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. М.: Наука, 1980.
8. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1972.
9. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1980.
10. Горелик В.А., Ушаков И.А. Исследование операций. —М.:Машиностроение, 1986.
11. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-ма­тематические модели. — М.: Компьютер, ЮНИТИ, 1995.
12. Зайченко Ю.П. Исследование операций. — Киев: Выща шко­ла, 1986.
13. Замков О. О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. — М.: ДИС, 1997.
14. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ., М.: Финансы и статистика, 1975.
15. Исследование операций / Под ред. Войтенко М. А. и Кремера Н.Ш. — М.: Экономическое образование, 1992.
16. Исследование операций. — В 2-х т./Под ред. Дж. Моудера и С. Элмаграби. Пер. с англ. — М.: Мир, 1981.
17. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. М.:Наука, 1972.
18. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математиче­ские методы и модели в планировании. — М.: Экономика, 1987.
19. Колемаев В.А. Математическая экономика. М., 1996.
20. Кофман А. Методы и модели исследования операций / Пер. с франц. — М.: Мир, 1986.
21. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Высшая школа, 1979.
22. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. М., 1992.
23. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ЮНИТИ, 1998.
24. Орлова И.В., Половников В А., Федосеев В.В. Курс лекций по экономико-математическому моделированию. — М.: Экономическое образование, 1993.
25. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. — М.: Финстатинформ, 1996.
26. Черчмен У., Акоф Р., Арноф Л. Введение в исследование операций. **—** М.: Финансы и статистика, 1977.
27. Экланд И. Элементы математической экономики. Пер. с франц. М.: Финансы и статистика, 1983.
28. Экономико-математические методы и прикладные модели / В.А. Половников и др. —М.: Финстатинформ, 1997.
29. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999.
30. Экономико-математические методы и прикладные модели Учебно-методическое пособие. /В.А. Половников, И.И Орлова, А.Н. Гармаш А.Н., Федосеев В.В. — М.: Финстатинформ, 1997.