Министерство Образования и Науки Российской Федерации

Институт Менеджмента, Маркетинга и Финансов

Кафедра Математики и математических методов в экономике

Моисеев С.И.

Методические указания

к выполнению лабораторного практикума по дисциплине

Математика

(часть 3 «Математические методы в экономике»)

для студентов экономических специальностей дневной формы обучения

Воронеж, 2006

Моисеев С.И. Методические указания к выполнению лабораторного практикума по дисциплине «Математика», часть 3 для студентов экономических специальностей дневной формы обучения // Воронеж, ИММиФ, 2006.- 39 с.

Методические указания предназначены для проведения лабораторного практикума по дисциплине «Математика», часть 3 «Математические методы в экономике». Основная задача лабораторного курса состоит в обучении студентов методам решения экономических задач с помощью ЭВМ в среде MS Excel.

Лабораторный практикум включает в себя восемь лабораторных работ по основным темам, предусмотренным учебной программой по дисциплине: различные виды задач линейного и нелинейного программирования, теория двойственности и ее применение в экономическом анализе, многокритериальные оптимизационные задачи, задачи теории матричных игр и игры с природой, моделирование спроса и балансовые модели. Каждая лабораторная работа содержит описательную часть, примеры решения поставленных задач на ЭВМ и задания для самостоятельного решения, содержащие 12 вариантов.

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия, в связи с интенсивным развитием компьютерных технологий, при практических исследованиях все большую роль получают численные методы решения прикладных задач с использованием ЭВМ. Не исключением стали задачи исследования экономики и методы принятия управленческих решений. В последнее время появилось множество прикладных программ, реализующих алгоритмы решения таких задач. Наиболее доступными и популярными среди них являются различные надстройки программы MS Excel входящие в пакет прикладных программ MS Office.

В данных методических указаниях предлагается курс лабораторных работ, основная задача которых состоит в обучении студентов экономических специальностей методам решения задач экономики и управления с помощью ЭВМ. Лабораторный практикум включает в себя шесть лабораторных работ по основным темам, предусмотренным учебной программой по дисциплине: различные виды задач линейного и нелинейного программирования, теория двойственности и ее применение в экономическом анализе, многокритериальные оптимизационные задачи, задачи теории матричных игр, балансовые модели. Каждая лабораторная работа содержит описательную часть, примеры решения поставленных задач на ЭВМ и задания для самостоятельного решения.

В ходе выполнения каждой работы студент должен проделать на ЭВМ все примеры в соответствии с предложенным описанием, выполнить все задания, в том числе и дополнительные, выданные преподавателем, оформить отчет по лабораторной работе. Отчет должен содержать:

- название лабораторной работы;
- цель работы;
- постановку каждого задания;
- результаты решения на ЭВМ;
- анализ полученного решения, интерпретация результатов;
- выводы и заключения по заданию.

Лабораторные работы № 1-2

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ЭВМ

Цель: научится методам решения задач линейного программирования на ЭВМ, рассмотреть основные типы задач – определение оптимального ассортимента продукции, задача составления смеси, транспортная задача, задача о назначении.

Задачи оптимального программирования и, как их частный случай, задачи линейного программирования (ЗЛП), являются мощным математическим аппаратом решения многих экономических задач, в частности, задач принятия управленческих решений. Разработано много методов аналитического решения ЗЛП, например, геометрический или симплекс-метод. Однако, аналитическое решение требует большого количества алгебраических вычислений, что может привести к вычислительным ошибкам, а также требует больших затрат времени. Поэтому, в связи с интенсивным развитием в последние десятилетия информационных технологий, целесообразно решать ЗЛП на ЭВМ. Для этих целей разработано множество программных средств, среди которых наиболее простой и доступной является надстройка «Поиск решения» (Solver Add – in[1]) электронных таблиц EXCEL.

Рассмотрим способ решения ЗЛП на следующем примере.

ПРИМЕР 1. Решить на ЭВМ задачу линейного программирования, которая имеет вид:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \le 17; \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 15; \\ 3x_2 - 4x_3 \ge 5; \end{cases}$$
$$x_{1,2,3} \ge 0; \quad x_1 - \textit{целое}.$$

Предварительно необходимо в электронной таблице подготовить исходные данные. Для этого, запустив MS Excel, выделим первую строчку под переменные. В ячейке А1 введем подпись «Переменные» и назначим под переменные x_1, x_2, x_3 ячейки B1, C1 и D1. Введем в эти ячейки любые произвольные числа, например единицы. Во второй строке определим целевую функцию. В ячейке А2 введем подпись

---

[1] Здесь и далее названия элементов программы приведены и на английском языке

«Целевая» и в соседней B2 введем формулу, зависящую от переменных «=2*B1+3*C1-D1» (для ввода ссылок на ячейку достаточно щелкнуть мышью по ней, кавычки не вводить). Нажав Enter получим результат 4. В третью строку вводим левые части основной системы ограничений. В A3 вводим подпись «Ограничения» и в B3 ставим курсор и вводим в виде формулы левую часть ограничения $3x_1 + x_2 - x_3 \leq 17$: «=3*B1+C1-D1». Аналогично, в ячейки C3 и D3 вводим левые части других ограничений, соответственно: «=2*B1+4*C1+D1» и «=3*C1-4*D1». Подготовительный этап закончен.

Для подключения надстройки «Поиск решения» (Solver Add – in), которая решает ЗЛП, нужно в меню «СЕРВИС» выбрать пункт «НАДСТРОЙКИ» и в нем установить флажок напротив пункта «ПОИСК РЕШЕНИЯ» (Solver Add – in). После этого вновь зайти в меню «СЕРВИС» и вызвать появившийся пункт «ПОИСК РЕШЕНИЯ» (Solver…). Откроется окно поиска решения. В нем нужно поставить окно в поле «Установить целевую» (Set Target Cell) и далее щелкнуть мышью по ячейке B2 с целевой функцией. В окне появится $B$2. Далее нужно проверить, что флажок ниже поля стоит напротив надписи «Равной максимальному значению» (Equal to … Max … Value of:). После ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» (By Changing Cell) и обводим ячейки с переменными B1, C1 и D1. В поле появиться $B$1:$D$1. В нижней части окна находится поле «Ограничения» (Subject to the Constraints). Для того, чтобы ввести ограничения, наживают кнопку «Добавить» (Add), откроется окно «Добавление ограничения» (Add Constraints). В левом поле «Ссылка на ячейку» (Cell Reference) вводят ссылку на левую часть первого ограничения – ячейку B3, в центральном окне определяем знак ≤ и в правом «Ограничения» (Constraints) набираем правую часть ограничения – число 17. Нажимаем «ОК», видим, что ограничение появилось в окне. Нажимаем вновь «Добавить» (Add), вводим «C3» «≤» и «15». Вновь нажимаем «Добавить» (Add), вводим «D3» «≥» и «5». Для ввода дополнительных ограничений $x_{1,2,3} \geq 0; \quad x_1 - \textit{целое.}$ вновь нажимаем «Добавить» (Add), ставим курсор в левое поле и обводим ячейки B1, C1 и D1 (результат $B$1:$D$1) в среднем окне ставим «≥» и в правом число 0. Снова «Добавить» (Add) в левое поле вводим B1, а в центральном выбираем «цел.» (int.). В правом окне появится «целое» (integer). Все ограничения введены. Для запуска вычислений нажимаем кнопку «Выполнить» (Solve). Появляется надпись, что решение найдено (Solver Found a Solution). Выбираем «Сохранить найденное решение» (Keep Solver Solution) и «ОК» видим результат: в ячейках B1, C1 и D1 видны значения переменных x_1, x_2, x_3, соответствующие оптимальному решению: 4; 1,75 и 0. В ячейки B2 – значение целевой функции: 13,25.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим решение задачи определения оптимального ассортимента продукции.

Фирма производит и продает два типа товаров. Фирма получает прибыль в размере 12 тыс.р. от производства и продажи каждой единицы товара 1 и в размере 4 тыс.р. от производства и продажи каждой единицы товара 2. Фирма состоит из трех подразделений. Затраты труда (чел.-дни) на производство этих товаров в каждом из подразделений указаны в таблице.

Подразделение	Трудозатраты, чел- дней на 1 шт.	
	товар 1	товар 2
1	1	2
2	1	3
3	2	3

Руководство рассчитало, что в следующем месяце фирма будет располагать следующими возможностями обеспечения производства трудозатратами: 800 чел-дней в подразделении 1, 600 — в подразделении 2 и 2000 — в подразделении 3. Сколько единиц товара 1 и товара 2 нужно выпустить, чтобы суммарная полученная прибыль была максимальна?

Для решения задачи составляем математическую модель. Пусть x_1 - количество товара 1, x_2 - количество товара 2. а Целевая функция и ограничения имеют вид:

$$12x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 800; \\ x_1 + 3x_2 \le 600; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2000; \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0; \quad x_{1,2} - \textit{целое.}$$

Задание 1. *Решить самостоятельно поставленную ЗЛП и проанализировать результаты.*

Отчет должен содержать математическую модель, значения переменных и целевой функции, полученные на ЭВМ, вывод, сколько товара каждого вида нужно выпускать и какая при этом ожидается прибыль.

Рассмотрим теперь задачу составления смеси.

ПРИМЕР 3. Для откорма животных используется три вида комбикорма: А, В и С. Каждому животному в сутки требуется не менее 800 г. жиров, 700 г. белков и 900 г. углеводов. Содержание в 1 кг. каждого вида комбикорма жиров белков и углеводов (граммы) приведено в таблице:

Содержание в 1 кг.	Комбикорм		
	A	B	C
Жиры	a[1]	240	300
Белки	170	b	110
Углеводы	380	440	c
Стоимость 1 кг	31	23	20

Сколько килограммов каждого вида комбикорма нужно каждому животному, чтобы полученная смесь имела минимальную стоимость?

Задание 2. *Составить математическую модель ЗЛП и решить ее на ЭВМ, провести анализ решения. Значения параметров* **a**, **b** *и* **c** *взять из таблицы для своего варианта.*

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	320	330	340	350	360	330	310	300	290	320	340	350
B	130	120	110	100	90	140	150	160	110	120	130	140
C	450	490	480	470	460	450	440	430	420	410	400	390

Отчет должен содержать математическую модель, значения переменных и целевой функции, полученные на ЭВМ, вывод, сколько комбикорма каждого вида нужно добавить в смесь, и какая при этом будет ее стоимость.

ПРИМЕР 4. Приведем решение транспортной задачи. Компания «Стройгранит» производит добычу строительной щебенки и имеет на территории региона три карьера. Запасы щебенки на карьерах соответственно равны 800, 900 и 600 тыс. тонн. Четыре строительные организации, проводящие строительные работы на разных объектах этого же региона дали заказ на поставку соответственно 300, 600, 650 и 500 тыс. тонн щебенки. Стоимость перевозки 1 тыс. тонн щебенки с каждого карьера на каждый объект приведены в таблице:

[1] Значения неизвестных параметров в каждом задании взять из таблицы для своего варианта

Карьер	*Строительный объект*			
	1	*2*	*3*	*4*
1	8	4	1	7
2	3	a[1]	7	3
3	13-a[1]	5	11	8

Необходимо составить такой план перевозки (количество щебенки, перевозимой с каждого карьера на каждый строительный объект), чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальными.

Данная транспортная задача является открытой, так как запасы поставщиков 800+900+600=2300 больше спроса потребителей 300+600+650+500=2050. Математическая модель ЗЛП в данном случае имеет вид:

$x_{ij};\ i = 1,2,3;\ \ j = 1,2,3,4$ - количество щебенки, перевозимой с i – го карьера на j – й объект. Тогда целевая функция равна

$$8x_{11} + 4x_{12} + x_{13} + 7x_{14} + 3x_{21} + a \cdot x_{22} + 7x_{23} + 3x_{24} +$$
$$+ (13 - a) \cdot x_{31} + 5x_{32} + 11x_{33} + 8x_{34} \to \min.$$

Ограничения имеют вид

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 800; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 900; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 600; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 300; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 600; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 650; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 500; \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

Задание 3*. Решить с помощью ЭВМ поставленную ЗЛП, провести ее анализ. Следует отметить, что в задаче число переменных, для которых проводится решение равно 3х4=12, поэтому, для исключения ошибок ввода данных, стоит ввести переменные* x_{il} *не в строку, а в прямоугольную таблицу из 3-х строк и 4-х столбцов а затем при вводе ограничений использовать строки и столбцы этой таблицы.*

Отчет должен содержать полученные в результате решения на ЭВМ значения переменных и целевой функции, вывод, сколько щебенки с каждого карьера нужно перевезти на каждый строительный объект и какие будут затраты на перевозку.

[1] Значение неизвестного параметра *a* взять равным номеру варианта.

Рассмотрим еще один вид задач, сводящихся к ЗЛП – задачу о назначениях.

<u>ПРИМЕР 5.</u> Цеху металлообработки нужно выполнить срочный заказ на производство деталей. Каждая деталь обрабатывается на 4-х станках С1, С2, С3 и С4. На каждом станке может работать любой из четырех рабочих Р1, Р2, Р3, Р4, однако, каждый из них имеет на каждом станке различный процент брака. Из документации ОТК имеются данные о проценте брака каждого рабочего на каждом станке:

Рабочие	Станки			
	С1	С2	С3	С4
Р1	2,3	1,9	2,2	2,7
Р2	1,8	2,2	2,0	1,8
Р3	2,5	2,0	2,2	3,0
Р4	2,0	2,4	2,4	2,8

Необходимо так распределить рабочих по станкам, чтобы суммарный процент брака (который равен сумме процентов брака всех 4-х рабочих) был минимален. Чему равен этот процент?

Обозначим за x_{ij}; $i=1,2,3,4$; $j=1,2,3,4$ - переменные, которые принимают значения 1, если i-й рабочий работает на j-м станке. Если данное условие не выполняется, то $x_{ij}=0$. Целевая функция есть:

$$2{,}3x_{11}+1{,}9x_{12}+2{,}2x_{13}+2{,}7x_{14}+1{,}8x_{21}+2{,}2x_{22}+2x_{23}+1{,}8x_{24}+$$
$$+2{,}5x_{31}+2x_{32}+2{,}2x_{33}+3x_{34}+2x_{41}+2{,}4x_{42}+2{,}4x_{43}+2{,}8x_{44}\to\min.$$

Вводим ограничения. Каждый рабочий может работать только на одном станке, то есть

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1; \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1; \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1. \end{cases}$$

Кроме этого, каждый станок обслуживает только один рабочий:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1; \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1; \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1; \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1. \end{cases}$$

Кроме того, все переменные должны быть целыми и неотрицательными: $x_{ij}\ge 0,\;\; x_{ij}-\text{целые}$.

Задание 4. *Решить поставленную ЗЛП на ЭВМ и провести ее анализ.*

Отчет должен содержать значения переменных и целевой функции, полученные на ЭВМ и вывод, какой рабочий будет обслуживать каждый станок и какой при этом будет средний процент брака.

Лабораторная работа № 3.

РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель: научится составлять и решать двойственные ЗЛП. Используя теорию двойственности, научиться методам анализа экономических задач. Получить навыки решения задач нелинейного программирования на ЭВМ.

Рассмотрим решение прямой и двойственной задач на примере задачи определения оптимального ассортимента продукции.

ПРИМЕР 1. Предприятие выпускает 2 вида продукции А и В, затрачивая на это три вида ресурсов: Труд, Сырье и Оборудование. Прочие условия приведены в таблице:

Ресурсы	Затраты ресурсов на ед. продукции		Наличие ресурсов
	продукция А	продукция В	
Труд	2	4	2000
Сырье	4	1	1400
Оборудование	2	1	800
Прибыль на ед. продукции	40	60	

Составить прямую и двойственную задачу, провести анализ решения.

Пусть x_1 - количество продукции А, x_2 - количество продукции В. Математическая модель прямой ЗЛП имеет вид:

$$40x_1 + 60x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 2000; \\ 4x_1 + x_2 \le 1400; \\ 2x_1 + x_2 \le 800; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \;\; x_2 \ge 0.$$

После решения задачи (решите ее самостоятельно на ЭВМ) получаем оптимальные значения переменных $x_1^* = 200$, $x_2^* = 400$, целевая функция при этом равна 32000. Таким образом, рационально выпускать 200 единиц продукции А и 400 единиц продукции В, при этом суммарная прибыль составит 32000.

Составляем двойственную задачу. Введем переменные y_1, y_2, y_3, которые назовем двойственными оценками ресурсов Труд, Сырье и Оборудование соответственно. Они имеют смысл предельных стоимостей единицы каждого вида сырья в случае, если предприятие решит реализовать его вместо готовой продукции. Тогда математическая модель двойственной задачи есть:

$$2000y_1 + 1400y_2 + 800y_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 40; \\ 4y_1 + y_2 + y_3 \geq 60; \end{cases}$$
$$y_{1,2,3} \geq 0.$$

Решив ЗЛП на ЭВМ (проделать это самостоятельно, перейдя на новый лист электронной таблицы Excel), получаем результаты $y_1^* = 40/3$; $y_2^* = 0$; $y_3^* = 20/3$. Целевая функция, как и должно быть, совпадает с оптимальным значением прямой ЗЛП и составляет 32000. Оптимальные значения переменных также позволяют определить оценки ценности ресурсов. Дефицитный ресурс, полностью используемый в оптимальном плане, имеет положительную ценность (оптимальное значение соответствующей переменной положительное). Недефицитный ресурс имеет нулевую ценность, в нашем примере это Сырье, т.к. $y_2^* = 0.$ В результате производства недефицитные ресурсы остаются, а дефицитные вырабатываются полностью. Среди дефицитных ресурсов более ценным является тот, у которого двойственная оценка выше. В нашем примере Труд дефицитнее чем Оборудование, т.к. $40/3 > 20/3$. Двойственные оценки также позволяют определять целесообразность включение в ассортимент новых видов продукции. Для решения задачи нужно рассчитать сумму произведений затрат производственных ресурсов a_i на их двойственные оценки $S = \sum_i a_i y_i^*$. Эта сумма имеет смысл общих затрат на производство, ее сравнивают с прибылью C, полученной от реализации единицы этой продукции. Если $S > C$, то данную продукцию производить не выгодно. Например, предприятие планирует выпускать еще два изделия C и D. Затраты ресурсов и прибыль для них следующие:

Ресурс	Оценки ценности ресурсов	Затраты ресурсов, a_i	
		изделие C	изделие D
Труд	40/3	6	4
Сырье	0	2	1
Оборудование	20/3	3	1
Прибыль на одно изделие, *C*		80	70

Для изделия C:

$$S = \frac{40}{3}\cdot 6 + 0\cdot 2 + \frac{20}{3}\cdot 3 = 100,\;\; C = 80,\;\; S > C\,,$$

следовательно, продукцию C выпускать не выгодно. Для изделия D:

$$S = \frac{40}{3}\cdot 4 + 0\cdot 1 + \frac{20}{3}\cdot 1 = \frac{180}{3} = 60,\;\; C = 70,\;\; S < C\,,$$

следовательно, продукцию D выпускать выгодно.

Задание 1. *Предприятие выпускает три вида продукции A, B и C. Для выпуска затрачиваются ресурсы: Труд, Сырье и Энергия. Остальные характеристики приведены в таблице:*

Тип ресурса	Нормы затрат на ед. продукции			Наличие ресурсов
	A	B	C	
Труд	*a*	4	3	200
Сырье	1	1	2	*b*
Энергия	1	2	2	130
Цена ед. продукции	*c*	60	80	

Значения неизвестных параметров a, b *и* c *взять из таблицы для своего варианта.*

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
a	1	2	3	2	1	3	1	2	3	2	1	3
b	80	90	100	110	120	130	50	60	70	80	90	100
c	40	39	38	37	45	44	43	42	41	40	39	38

Составить и решить прямую и двойственную задачи, провести анализ решения. Проанализировать ценности ресурсов. Определить, целесообразно ли включать в план продукцию четвертого вида, *если цена единицы этой продукции составляет 70 у.е., а на ее производство расходуется по 2 ед. ресурсов каждого вида.*

Отчет должен содержать математическую модель прямой задачи, полученные на ЭВМ из ее решения значения переменных и целевой функции, математическую модель двойственной задачи, оптимальные значения ее переменных и значение целевой функции. Сделать выводы: 1) сколько продукции каждого вида следует выпускать и чему при этом будет равна прибыль; 2) какая оценка ценности каждого ресурса, какие ресурсы дефицитные, а какие нет; 3) какие общие затраты на производство продукции четвертого вида и целесообразно планировать ее выпуск.

Рассмотрим теперь методы решения задач нелинейного программирования на ЭВМ. Такие задачи могут содержать как внутри целевой функции, так и внутри ограничений нелинейные выражения относительно неизвестных переменных. Для решения нелинейных задач также используют надстройку «Поиск решения» (Solver Add-in). Методы численного решения нелинейных задач почти ни чем не отличаются от методов решения ЗЛП, единственное отличие в том, что при вводе целевой функции и ограничений в ячейках электронной таблицы могут использоваться нелинейные функции.

ПРИМЕР 2. Найти максимум функции $Z = 3x_1^2 - 4x_2 + 3x_3^3$,

при ограничениях $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 8; \\ x_{1,2,3} \ge 0;\ \ x_{1,2,3} - \text{целые}. \end{cases}$

Вводим на отдельном листе в ячейки А1-С1 произвольные значения, например единицы. В ячейку А2 вводим целевую функцию «=3*A1*A1-4*B1+3*C1*C1*C1» (кавычки не вводить), в ячейку А3 вводим левую часть основного ограничения «=4*A1+3*B1+2*C1». Выбираем «Сервис/Поиск решения (Solver…)». Ссылка на целевую ячейку (Set Target Cell) - А2, стремится к максимуму. Изменяемые ячейки (By Changing Cell)– А1-С1. Ограничения (Subject to the Constraints): \$A\$3≤8; \$A\$1:\$C\$1≥0; \$A\$1:\$C\$1 – целое (int). Запуская надстройку, получаем оптимальное решение $x_1^* = 0;\ x_2^* = 0;\ x_3^* = 4.$

Целевая функция при этом равна $Z^* = 192$.

Задание 2. *Найти условные экстремумы целевой функции Z, при заданных ограничениях:*

а)

$$Z = x_1 x_2 \to \max;$$
$$x_1^2 + x_2^2 = a,$$

б)

$$Z = x_1^3 + x_2^3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + bx_2 = 2; \\ x_{1,2} \ge 0, \end{cases}$$

в)

$$Z = c \cdot x_1 + x_2 \to \min;$$
$$1/x_1 + 1/x_2 = 1.$$

Значения параметров a, b *и* c *взять из таблицы для своего варианта.*

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	7	6	5	4	3	2	3	4	5	6	7	8
b	2	1	3	4	1	3	4	2	3	4	2	1
c	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5

Отчет должен содержать найденные на ЭВМ оптимальные значения переменных и целевой функции.

Лабораторная работа № 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ЭВМ

Цель: научиться методам решения многокритериальных ЗЛП с помощью ЭВМ, используя метод последовательных уступок.

Во многих реальных экономических задачах критериев, которые оптимизируются, может быть несколько. Например, при производстве продукции максимизируется качество и минимизируется себестоимость, при взятии ссуды в банке максимизируется кредитный срок и минимизируется процентная ставка, при выборе места для строительства дома отдыха максимизируются экологические условия и минимизируется расстояние от населенного пункта.

Существует несколько методов решения многокритериальных задач. Одним из наиболее эффективных является метод последовательных уступок, использование которого рассмотрим на примере.

ПРИМЕР 1. Математическая модель трехкритериальной задачи имеет вид:

$$Z_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;$$
$$Z_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min;$$
$$Z_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 16; \\ x_1 + 2x_2 \le 24; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$$

Решить задачу методом последовательных уступок, выбрав уступку по первому критерию δ_1=4, а по второму δ_2=5.

Открываем электронную книгу Excel и, как и для решения однокритериальной задачи определяем ячейки под переменные x_1, x_2, x_3. Для этого в ячейку A1 вводим подпись «Переменные», а соседние три ячейки B1, C1 и D1 вводим значения переменных. Это могут быть произвольные числа, например единицы, далее они будут оптимизироваться. Во второй строке задаем целевые функции. В A2 вводим подпись «Целевые», а в B2 формулой «=2*B1+C1-3*D1» задаем первую целевую функцию $2x_1 + x_2 - 3x_3$. Аналогично в C2 и D2 вводим вторую и третью целевую функцию, вводя в C2 «=B1+3*C1-2*D1», а в D2 «=-B1+2*C1+4*D1». В третью строку вводим левые части ограничений. Для этого вводим в A3 подпись «Ограничения», в B3 формулу «=B1+3*C1+2*D1», в C3 формулу «=2*B1-C1+D1» и в D3 формулу «=B1+2*C1».

Предварительные действия завершены. Вызываем надстройку «Поиск решения» (Solver Add – in) в меню «Сервис». Если этого пункта меню нет, то вызываем меню «Сервис/Надстройки» и ставим флажок напротив раздела «Поиск решения» (Solver Add – in), появится пункт «Сервис/Поиск решения» (Сервис/Solver…), который следует запустить.

На первом этапе оптимизируем первую целевую функцию. После открытия окна «Поиск решения» (Solver Add – in) в поле «Установить целевую» (Set Target Cell) ставим курсор и делаем ссылку на ячейку B2, щелкая по ней мышью. В окне появится $B$2. В связи с тем, что целевая функция максимизируется, далее нужно проверить, что флажок ниже поля стоит напротив надписи «Равной максимальному значению» (Equal to … Max … Value of:). После ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» (By Changing Cell) и обводим ячейки с переменными B1, C1 и D1, выделяя ячейки с переменными. В поле появиться $B$1:$D$1. В нижней части окна находится поле «Ограничения» (Subject to the Constraints). Для того, чтобы ввести ограничения, наживают кнопку «Добавить» (Add), откроется окно «Добавление ограничения» (Add Constraints). В левом поле «Ссылка на ячейку» (Cell Reference) вводят ссылку на левую часть первого ограничения – ячейку B3, в центральном окне определяем знак ≥ и в правом «Ограничения» (Constraints) набираем правую часть ограничения – число 1. Нажимаем «ОК», видим, что ограничение появилось в окне. Нажимаем вновь «Добавить» (Add), вводим «C3» «≤» и «16». Вновь нажимаем «Добавить», вводим «D3» «≤» и «24». Для ввода дополнительных ограничений $x_{1,2,3} \geq 0$, вновь нажимаем «Добавить», ставим курсор в левое поле и обводим ячейки B1, C1 и D1 (результат $B$1:$D$1) в среднем окне ставим «≥» и в правом число 0. Для запуска вычислений нажимаем кнопку «Выполнить» (Solve). Появляется надпись, что решение найдено (Solver Found a Solution). Выбираем «Сохранить найденное решение» (Keep Solver Solution) и «ОК» видим результат: в ячейках B1, C1 и D1 видны значения переменных x_1, x_2, x_3, соответствующие оптимальному решению: 11,2; 6,4 и 0. В ячейки B2 – значение целевой функции 28,8.

На втором этапе оптимизируется вторая целевая функция. Однако, первую, в соответствие с методом последовательных уступок, можно ухудшить первый критерий на величину не более, чем δ_1=4. По этой причине, на втором шаге, значения в ячейке B2 (где хранится первая целевая функция, которая максимизируется) может быть значение, не меньшее, чем 28,8-4=24,8. Вызываем надстройку «Сервис/Поиск решения» (Сервис/Solver…), видим, что все прежние данные остались введенными. Меняем ссылку на целевую функцию. Ставим курсор в поле «Установить целевую» (Set Target Cell) и щелкаем по ячейке C2, в которой находится ссылка на вторую целевую функцию. Так, как вторая целевая минимизируется, то ставим флажок в поле напротив надписи «Равной минимальному значению» (Equal to … Max … Value of:). Вводим дополнительное ограничение, связанное с уступкой по первому критерию. Переводим курсор в поле «Ограничения» (Subject to the Constraints) и нажимаем кнопку «Добавить» (Add), правее поля. В появившемся окне «Добавление ограничения» (Add Constraints) в трех окнах (слева на право) вводим данные «B2», «≥», «24,8». Результат – переменные x_1, x_2, x_3 равны 10,2; 4,4; 0. Вторая целевая функция равна 23,4 (ячейка B2). Первая равна своему минимальному значению 24,8 (ячейка C2).

На третьем этапе делаем уступку по второму критерию. Величина уступки равна δ_2=5. Так, как вторая функция минимизируется, то ее значение не должно превышать 23,4+5=28,4. Вызываем надстройку «Сервис/Поиск решения» (Сервис/Solver…). Меняем ссылку на целевую функцию. Ставим курсор в поле «Установить целевую» (Set Target Cell) и щелкаем по ячейке D2, в которой находится ссылка на третью целевую функцию. Так, как третья целевая максимизируется, то ставим флажок в поле напротив надписи «Равной максимальному значению» (Equal to … Max … Value of:). Вводим дополнительное ограничение, связанное с уступкой по второму критерию. Переводим курсор в поле «Ограничения» (Subject to the Constraints) и нажимаем кнопку «Добавить» (Add). В появившемся окне «Добавление ограничения» (Add Constraints). вводим данные «C2», «≤», «28,4». Результат – переменные x_1, x_2, x_3 равны 10,76; 6,62; 1,11. Целевые функции равны, соответственно, 24,8; 28,4 и 6,93. Это окончательный ответ. Все дополнительные условия соблюдены.

Задание 1. *Решить методом последовательных уступок двухкритериальную задачу, представленную математической моделью:*

$$Z_1 = x_1 - 3x_2 \to \max;$$
$$Z_2 = 2x_1 - 2x_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 2; \\ x_1 + x_2 \le 11; \\ x_1 - x_2 \le -1; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Уступка по первому критерию оптимизации равна d_1=2.

Отчет должен содержать оптимальные значения переменных и всех целевых функций, полученных в результате расчета на ЭВМ.

Задание 2. *Молочный комбинат, исследовав конъюнктуру местного рынка, решил выпускать новый вид йогурта, который был бы конкурентно способен. При этом, необходимо разработать план организации производства для выпуска данного продукта. Основными затратами на разработку являются затраты на модернизацию оборудование x и затраты на научные исследования y. При исследовании установлено, что себестоимость единицы продукции при этом будет зависеть от затрат как* $F_1(x,y) = 12 + ax + by$ *, а качество продукции как* $F_2 = 6 + cx + dy$ *.. Ставится задача минимизировать себестоимость (цену) данного продукта и максимизировать качество выпускаемой продукции. Из двух целевых функций основной* *считается цена (себестоимость продукции). По фактору «цена» можно сделать уступку 3 денежные единицы. Решить задачу методом последовательных уступок и найти оптимальные значения факторов x и y, а также значения целевых функций, если на факторы наложены ограничения:*

$$\begin{cases} 5x+4y \le 40; \\ 2x+y \ge 8; \\ 0 \le x \le 6; \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Исходные данные взять в зависимости от варианта из таблицы.

Вар.	*a*	*b*	*c*	*d*	Вар.	*a*	*b*	*c*	*d*
1	1	2	4	4	7	2	4	2	1
2	3	2	1	2	8	3	4	2	2
3	2	4	1	1	9	2	1	4	2
4	2	2	1	2	10	2	2	2	1
5	3	4	2	2	11	3	1	4	
6	3	4	3	3	12	3	3	2	2

Отчет должен содержать математическую модель задачи, оптимальные значения переменных и всех целевых функций, полученных в результате расчета на ЭВМ, выводы, какие должны быть затраты на модернизацию оборудования и на научные исследования, какими при этом будет себестоимость и качество продукции..

Задание 3. *Решить методом последовательных уступок двухкритериальную задачу, представленную математической моделью:*

$$Z_1 = 2x_1 + x_2 - 5x_3 \to \max;$$

$$Z_2 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \ge 2; \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 27; \\ 6x_1 + 5x_2 \le 75; \\ 2x_1 + 3x_3 \ge 3; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$$

Уступка по первому критерию оптимизации d_1 равна номеру варианта.

Отчет должен содержать оптимальные значения переменных и всех целевых функций, полученных в результате расчета на ЭВМ.

Задание 4. *Решить методом последовательных уступок трехкритериальную задачу, представленную математической моделью:*

$$Z_1 = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min;$$
$$Z_2 = -3x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max;$$
$$Z_3 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + a \cdot x_3 \ge 1; \\ x_1 + b \cdot x_2 + x_3 \le 19; \\ c \cdot x_1 + 3x_2 \le 21; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0.$$

Значения параметров $a,\ b$ *и* c *взять из таблицы для своего варианта.*

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	1	2	3	3	1	1	2	2	3	1	2	3
b	2	1	1	2	3	2	3	1	2	1	2	3
c	3	3	2	3	2	1	1	2	2	1	2	3

Уступки по первому и второму критерию оптимизации равны $d_1=6$*,* $d_2=4$*.*

Отчет должен содержать оптимальные значения переменных и всех целевых функций, полученных в результате расчета на ЭВМ.

Лабораторная работа № 5

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ИГР

Цель: ознакомится с методами решения экономических задач в условиях конфликтных ситуаций используя математическую модель теории матричных игр на ЭВМ.

Рассмотрим методы принятия управленческих решений в условиях конфликта, когда в ситуации участвуют две стороны, интересы которых противоположны. Это могут быть, например, отношения продавца и покупателя, банка и заемщика, истца и ответчика. Для решения таких задач используют методы теории игр, для анализа которых удобно использовать ЭВМ.

Пусть в игре участвуют два игрока А и В. Игрок А имеет n чистых стратегий, а игрок В – m стратегий. Тогда платежная матрица игры имеет вид: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & . \; . \; . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$. Для нахождения вероятностей p_i и q_j смешанных стратегий $A^* = \begin{pmatrix} A_1 \, A_2 \dots A_n \\ p_1 \, p_2 \dots p_n \end{pmatrix}$ и $B^* = \begin{pmatrix} B_1 \, B_2 \dots B_m \\ q_1 \, q_2 \dots q_m \end{pmatrix}$, необходимо решать прямую и двойственную задачи линейного программирования (ЗЛП) вида:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to \min;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n \ge 1; \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n \ge 1; \\ \quad . \; . \; . \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n \ge 1; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0; \;\; i = 1,2,\ldots,n.$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1m}y_m \le 1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2m}y_m \le 1; \\ \quad . \; . \; . \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_m \le 1 \end{cases}$$

$$y_j \ge 0; \;\; j = 1,2,\ldots,m.$$

Из решения задач линейного программирования находятся цена игры $\nu = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \dfrac{1}{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}$ и вероятности состояний $p_i = x_i\nu$, $q_j = y_j\nu$; $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,m$.

Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 1. Две конкурирующие коммерческие организации А и В выпускают продукцию одного вида. Каждая организация планирует проведение рекламной акции, причем маркетологи каждой компании предложили четыре сценария ее проведения A_1, A_2, A_3, A_4 - для компании А и B_1, B_2, B_3, B_4 - для компании В. Ожидаемая прибыль для кампании А при каждой ее стратегии A_i и ответе B_j представлена в платежной матрице:

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	70	30	20	50
A_2	60	50	40	80
A_3	20	60	80	60
A_4	50	70	30	50

Необходимо найти оптимальные стратегии для обоих игроков А и В в предположении, что чем больше выигрыш одного игрока, тем он меньше для другого. Определить среднюю прибыль А.

Данную задачу нельзя свести к задаче меньшей размерности, так как ее каждая строка не меньше, чем другая строка, а каждый столбец не больше другого столбца. Построим задачу линейного программирования. Рассмотрим задачу со стороны игрока А . Введем параметры, пропорциональные вероятностям чистых стратегий, которые равны x_1, x_2, x_3, x_4. Тогда нужно составить задачу линейного программирования, то есть необходимо найти минимум функции при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 50x_4 \geq 1; \\ 30x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 70x_4 \geq 1; \\ 20x_1 + 40x_2 + 80x_3 + 30x_4 \geq 1; \\ 50x_1 + 80x_2 + 60x_3 + 50x_4 \geq 1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\;\; x_2 \geq 0;\;\; x_3 \geq 0;\;\; x_4 \geq 0.$$

Для решения данной ЗЛП на ЭВМ также используют надстройку EXCEL «Поиск решения» (Solver Add – in).

Подготовим предварительно в электронной таблице данные. Запускаем программу MS Excel, вводим в ячейку A1 открывшейся электронной таблицы подпись «Переменные», а в следующие ячейки B1-E1, произвольные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Это вначале могут быть произвольные числа, например единицы. Вводим в ячейки B1-E1 в каждую цифры 1.

Далее, в ячейку A2 вводим подпись «Целевая», а в соседнюю ячейку B2 значение целевой функции (переключившись в английский режим набора текста): «=B1+C1+D1+E1», что означает формулу $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. В третьей строке вводятся левые части системы ограничений. Для этого переводим курсор в ячейку A3 и вводим в ней текст «Ограничения», а в ячейку B3 формулу «=70*B1+60*C1+20*D1+50*E1», которая соответствует левой части первого ограничения системы $70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 50x_4 \geq 1$. Три остальных ограничения вводим в ячейки C3-B3, а именно, в ячейку C3: «=30*B1+50*C1+60*D1+70*E1», в D3: «=20*B1+40*C1+80*D1+30*E1», в ячейку E3: «=50*B1+80*C1+60*D1+50*E1». После этого вызываем надстройку Сервис/Поиск решения (Solver…), в поле «Установить целевую ячейку» (Set Target Cell) даем ссылку на B2. Ниже, в области «Равной», поставить переключатель на минимальное значение (Equal to … Max … Value of:). Ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» (By Changing Cell), и даем ссылки на переменные, обводя мышью ячейки B1-E1. Далее, переводим курсор в поле «Ограничения» (Subject to the Constraints), и вводим ограничения. Для этого, нажимаем на кнопку «Добавить» (Add) слева от поля и в появившемся окне в поле «Ссылка на ячейку» (Cell Reference) даем ссылку на ячейку, содержащую левую часть первого ограничения $70x_1 + 60x_2 + 20x_3 + 50x_4 \geq 1$, которая хранится в ячейке B3 (то есть переводим курсор в поле «Ссылка на ячейку» (Cell Reference) и щелкаем мышью по ячейке B3). В центральном поле выбираем знак неравенства – ограничения : «≥», в поле «Ограничение» (Constraints) вводим единицу. Нажимаем «ОК». Вводим второе ограничение, нажимая «Добавить» (Add), вводим в поля: ссылку на «C3», «≥», «1», нажимаем «ОК», далее «Добавить» (Add), ссылку на «D3», «≥», «1», «ОК», «Добавить», ссылку на «E3», «≥», «1», «ОК». Для ввода дополнительных ограничений $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0$ нажимаем «Добавить», в поле «Ссылка на ячейку» (Constraints) ставим курсор и обводим ячейки B1-E1, выводим в центральное поле «≥», ограничение «0», нажимаем «ОК». Далее запускаем программу, нажимая «Выполнить» (Solve). Результат: $x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}015,\ x_3 = 0{,}05,\ x_4 = 0$, что видно из ячеек B1-E1. Вводим в A5 подпись «Цена игры», а в соседнюю B5 формулу (переключаясь на английский язык) «=1/(B1+C1+D1+E1)». Результат: 50. Это средняя вероятность выигрыша для игрока A. Находим вероятности чистых стратегий в смешанной стратегии *p*. Для этого вводим в A6 подпись «P1=», а в соседнюю B6 формулу «=B5*B1», вводим в A7: «P2=», а в B7 формулу «=B5*C1», в A8: «P3=», а в B8: «=B5*D1», в A9: «P4=», в B9: «=B5*E1». Данные показатели и есть решение задачи.

Рассмотрим теперь решение относительно игрока B.

Для него вводим переменные, пропорциональные вероятностям чистых стратегий $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$. ЗЛП для игрока B имеет вид:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 70y_1 + 30y_2 + 20y_3 + 50y_4 \leq 1; \\ 60y_1 + 50y_2 + 40y_3 + 80y_4 \leq 1; \\ 20y_1 + 60y_2 + 80y_3 + 60y_4 \leq 1; \\ 50y_1 + 70y_2 + 30y_3 + 50y_4 \leq 1; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0;\quad y_2 \geq 0;\quad y_3 \geq 0;\quad y_4 \geq 0.$$

Переходим на «Лист2» электронной таблицы, щелкнув на соответствующей закладке внизу таблицы. Вводим в ячейки открывшейся чистой электронной таблицы в ячейку A1 надпись «Переменные», а в следующие ячейки, произвольные значения переменных, например, вводим в ячейки B1-E1 в каждую цифры 1. В ячейку A2 вводим подпись «Целевая». Вводим в ячейку B2 значение целевой функции (переключившись в английский режим набора текста): «=B1+C1+D1+E1», что означает формулу $y_1+y_2+y_3+y_4$. В третьей строке вводятся левые части системы ограничений. Для этого переводим курсор в ячейку A3 и вводим в ней текст «Ограничения». Переключившись в английский режим клавиатуры, вводим в ячейку B3 формулу «=70*B1+30*C1+20*D1+50*E1», которая соответствует левой части первого ограничения системы $70y_1+30x_2+20x_3+50x_4 \le 1$. Вводим в ячейку C3: «=60*B1+50*C1+40*D1+80*E1», в D3: «=20*B1+60*C1+80*D1+60*E1», в ячейку E3: «=50*B1+70*C1+30*D1+50*E1». После этого вызываем надстройку в меню «сервис» и подменю «Поиск решений» (Solver…), открывается окно надстройки. В поле «Установить целевую ячейку» (Set Target Cell) даем ссылку на B2. Ниже, в области «Равной», поставить переключатель на максимальное значение (Equal to … Max … Value of:). Ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» (By Changing Cell), и даем ссылки на переменные, обводя мышью ячейки B1-E1. Далее, переводим курсор в поле «Ограничения» (Subject to the Constraints), и вводим ограничения. Для этого, нажимаем на кнопку «Добавить» (Add) и далее в поле «Ссылка на ячейку» (Cell Reference) даем ссылку на ячейку B3, в центральном поле выбираем знак неравенства – ограничения : «≤», в поле «Ограничение» (Constraints) вводим единицу. Нажимаем «ОК». Вводим второе ограничение, нажимая «Добавить» (Add), вводим в поля: «C3», «≤», «1», нажимаем «ОК», далее «Добавить» (Add), ссылку на «D3», «≤», «1», «ОК», «Добавить» (Add), ссылку на «E3», «≤», «1», «ОК». Для ввода дополнительных ограничений $y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0;\ y_4 \ge 0$ нажимаем «Добавить» (Add), в поле «Ссылка на ячейку» (Cell Reference) ставим курсор и обводим ячейки B1-E1, выводим в центральное поле «≥», ограничение «0», нажимаем «ОК». Далее запускаем программу, нажимая «Выполнить» (Solve). Результат решения ЗЛП в ячейках B1-E1. Вводим в A5 подпись «Цена игры», а в соседнюю B5 формулу (переключаясь на английский язык) «=1/(B1+C1+D1+E1)». Находим вероятности чистых стратегий q в смешанной стратегии игрока B. Для этого вводим в A6 подпись «q1=», а в соседнюю B6 формулу «=B5*B1», вводим в A7: «q2=», а в B7 формулу «=B5*C1», в A8: «q3=», а в B8: «=B5*D1», в A9: «q4=», в B9:«=B5*E1». Данные показатели и есть решение задачи для игрока B.

ПРИМЕР 2. Построить прямую и двойственную задачи линейного программирования для решения матричной игры, заданной платежной матрицей: $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Прямая и двойственная задачи линейного программирования имеют вид:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min;$$
$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 \ge 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 8x_5 \ge 1; \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \ge 1; \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_i \ge 0;\ i = 1,2,3,4,5.$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} 9y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 5y_4 \le 1; \\ 2y_1 + 5y_2 + 8y_3 + 3y_4 \le 1; \\ 6y_1 + 7y_2 + 2y_3 + 4y_4 \le 1; \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 6y_4 \le 1; \\ 3y_1 + 8y_2 + y_3 + 7y_4 \le 1; \end{cases}$$
$$y_j \ge 0;\ j = 1,2,3,4.$$

Из решения можно найти игры цену игры

$\nu = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = \dfrac{1}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}$ и вероятности состояний

$p_i = x_i\nu,\ (i = 1,2,3,4,5);\ q_j = y_j\nu,\ (j = 1,2,3,4)$.

Задание 1. *Самостоятельно с использованием ЭВМ решить поставленные ЗЛП и найти оптимальные смешанные стратегии для игроков A и B.*

Отчет должен содержать решения поставленных ЗЛП (значения переменных x_i и y_j, значения целевых функций), смешанные стратегии для обоих игроков $A^* = \begin{pmatrix} A_1\, A_2 \ldots A_n \\ p_1\, p_2 \ldots p_n \end{pmatrix}$ *и* $B^* = \begin{pmatrix} B_1\, B_2 \ldots B_m \\ q_1\, q_2 \ldots q_m \end{pmatrix}$, *цену игры n.*

Задание 2. *Директор предприятия A заключает договор с конкурирующей фирмой B о реализации своей продукции на конкретной территории областного центра. Конкурирующие стороны выделили пять районов области. Каждая из них может развивать* *свое производство в этих пяти районах:* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 - *для стороны А и* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 - *для В. Вероятности успеха для стороны А приведены в платежной матрице:*

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	70	50	40	60
A_2	90	20	10	30	*c*
A_3	*a*	40	30	80	60
A_4	50	40	30	60	90
A_5	20	30	*b*	60	10

Определить оптимальные стратегии для каждой стороны.
Значения параметров a, b *и* c *взять из таблицы для своего варианта.*

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
a	20	30	40	10	20	15	35	30	40	50	45	25
b	70	75	80	85	90	95	65	70	80	90	60	70
c	40	60	50	40	30	20	60	50	40	30	20	30

Отчет должен содержать математическую модель ЗЛП, составленную для игрока А, ее решение, оптимальную смешанную стратегию для игрока А, цену игры n, *выводы, в каких районах предприятие А должно реализовывать свою продукцию и в каких пропорциях, чтобы получить оптимальную прибыль вне зависимости от поведения конкурента В и чему равна эта прибыль.*

Задание 3. *Решить игру, описанную платежной матрицей для обоих игроков (матрица приведена для игрока А).*

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	**9**	***a***	**6**	**3**	**5**
A_2	**10**	**7**	***b***	**7**	**5**
A_3	**5**	**8**	**12**	**11**	**1**
A_4	**5**	**6**	**4**	**8**	***c***

Значения параметров a, b *и* c *взять из таблицы для своего варианта.*

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	11	10	12	9	13	12	11	10	9	12	10	9
b	5	2	1	3	4	6	7	6	5	4	3	2
c	11	12	13	14	15	9	10	11	12	13	14	15

Отчет должен содержать математические модели ЗЛП, составленные для обоих игроков, полученные в результате решения на

ЭВМ смешанные стратегии для обоих игроков $A^* = \begin{pmatrix} A_1\, A_2 \dots A_n \\ p_1\, p_2 \dots p_n \end{pmatrix}$ *и* $B^* = \begin{pmatrix} B_1\, B_2 \dots B_m \\ q_1\, q_2 \dots q_m \end{pmatrix}$, *цену игры* n.

Лабораторная работа № 6

ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

Цель: научится методам принятия решений в условиях неопределенности (такие математические модели называются Играми с природой) на ЭВМ с использованием критериев Лапласа, Вальда, максимального оптимизма, Сэвиджа и Гурвица.

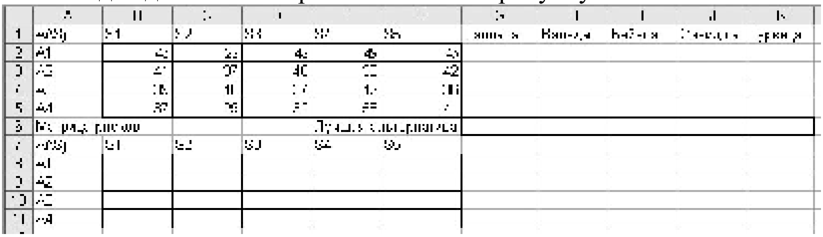
Рассмотрим ситуацию, когда лицо принимающее решение может выбрать одну из n возможных альтернатив, которые обозначим $A_1, A_2, \dots, A_n$, то есть выбирает наилучших вариант действий из имеющихся n возможных. Выигрыш для каждой альтернативы зависит от того, какой вариант развития ситуации произойдет. Пусть возможны m вариантов развития ситуации, которые обозначим $S_1, S_2, .., S_m$. Существует несколько критериев, позволяющих выбрать оптимальное решение в модель игр с природой. Сначала рассмотрим случай, когда показатель привлекательности (выигрыш лица, принимающего решения) максимизируется – «чем больше, чем лучше». Рассмотрим на примере способы решения такой задачи.

ПРИМЕР 1. Директор финансовой компании проводит рискованную финансовую операцию. Страховая компания предлагает застраховать сделку и предлагает 4 варианта страховки: $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$. Компенсация ущерба для каждого варианта зависит от того, какой из возможных страховых случаев произошел. Выделяют 5 видов страховых случаев: $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,\ S_5$. Компенсации (тыс. у. е.) для каждого вида страховки при каждом страховом случае составляют матрицу выигрышей вида:

A_i \ S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	43	22	42	49	45
A_2	41	37	40	38	42
A_3	39	48	37	42	36
A_4	37	29	32	58	41

Выбрать наилучшую альтернативу, используя критерии Лапласа, Вальда, Байеса (при вероятностях состояний исходов $p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}2;\ p_3 = 0{,}1;\ p_4 = 0{,}3;\ p_5 = 0{,}1$), Сэвиджа и Гурвица (при коэффициенте доверия $\alpha = 0{,}4$).

Вводим данные в электронную таблицу и готовим подписи в ячейках для дальнейшего расчета согласно рисунку:



Вычисляем функции полезности для критерия Лапласа. Для этого ставим курсор в ячейку G2 и вводим формулу, усредняющую значения показателей привлекательности по первой альтернативе. Для этого вызываем мастер функций, нажимая на кнопку $\boxed{fx}$ и выбираем в категории «Статистические» функцию «СРЗНАЧ», в качестве аргумента функции указываем ячейки B2:F2, обводя их курсором. Нажимаем ОК, видим результат 40,2. Автозаполняем ячейки G2-G5, перетаскивая нижний правый уголок ячейки G2. Видно, что наибольшая функция полезности 40,4 для альтернативы А3. Вводим в G6: «А3».

Для критерия Вальда вычисляем наименьшие показатели привлекательности для каждой альтернативы. Для этого вводим в H2 функцию МИН с аргументами B2:F2: «=МИН(B2:F2)» (кавычки не вводить!). Автозаполняем на H2-H5. Выбираем альтернативу, где результат наибольший. Это значение 37 для альтернативы А2, вводим в H6: «А2».

Для критерия Байеса функции полезности равны суммам выигрышей, умноженным на вероятности их исходов. Вводим в I2 формулу:

«=B2*0,3+C2*0,2+D2*0,1+E2*0,3+F2*0,1»,

автозаполняем на I2-I5. Выбираем альтернативу с наибольшей функцией полезности, то есть А4, вводим в I6: «А4».

Для критерия Сэвиджа необходимо построить матрицу рисков. Для этого ставим курсор в ячейку B8 и вводим формулу «=МАКС(B$2:B$5)-B2», автозаполняем результат на ячейки B8-F11. Далее находим максимальный риск для каждой альтернативы. Для этого ставим курсор в ячейку J2 и вводим «=МАКС(B8:F8)», автозаполняем результат на J2-J5. Выбираем альтернативу с минимальным риском, это А3. Вводим в J6: «А3».

Для критерия Гурвица нужно наибольшее значение каждой альтернативы умножить на α (по условию $a = 0,4$), наименьшее на (1-α) и результаты сложить. Вводим в К2 формулу:

=МАКС(B2:F2)*0,4+МИН(B2:F2)*0,6

и автозаполняем результат на К2-К5. Выбираем альтернативу с наибольшей функцией полезности. Это А3, вводим К6: «А3». Задача решена.

Рассмотрим теперь метод решения задачи в случае минимизации критерия – «чем меньше, тем лучше».

ПРИМЕР 2. Фермер, имея в аренде большие площади под посев кукурузы, заметил, что влажности почвы в сезон созревания кукурузы недостаточно, чтобы получить максимальный урожай. Эксперты советовали фермеру провести дренажные каналы в период конца весны – начала лета, что должно значительно повысить урожай. Были предложены 5 проектов дренажных каналов: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, затраты на которые зависят от погодных условий в период весна – лето. Возможны варианты: S_1 – дождливая весна и дождливое лето; S_2 – дождливая весна и сухое лето; S_3 – сухая весна и дождливое лето; S_4 – сухая весна и сухое лето. Матрица затрат имеет вид:

A_i \ S_j	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	21	12	22	25
A_2	20	21	18	19
A_3	16	33	14	17
A_4	23	16	19	24
A_5	15	16	24	26

Выбрать наилучшую альтернативу, используя критерии Лапласа, Вальда, Байеса с $p_1 = 0,2;\ p_2 = 0,3;\ p_3 = 0,3;\ p_4 = 0,2$, Сэвиджа и Гурвица при коэффициенте доверия $\alpha = 0,7$.

Вводим данные в электронную таблицу и готовим подписи в ячейках для дальнейшего расчета согласно рисунку:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Ai\Sj	S1	S2	S3	S4	Лаплас	Вальд	Байес	Сэвидж	Гурвиц
2	A1	[illegible]	12	[illegible]	[illegible]					
3	A2	20	[illegible]	[illegible]	[illegible]					
4	A3	10	[illegible]	14	[illegible]					
5	A4	23	13	[illegible]	24					
6	A5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]					
7	Матрица рисков			Лучшая альтернатива						
8	Ai\Sj	S1	S2	S3	S4					
9	A1									
10	A2									
11	A3									
12	A4									
13	A5									

Вычисляем функции полезности для критерия Лапласа. Для этого ставим курсор в ячейку F2 и вводим формулу: «=СРЗНАЧ(B2:E2)», автозаполняем на F2-F6. Наилучшей в данном случае считается альтернатива с *минимальной* функцией полезности, это A2. Вводим в F7: «A2».

Для критерия Вальда вычисляем наибольшие показатели привлекательности для каждой альтернативы. Для этого вводим в G2 функцию «=МАКС(B2:E2)», автозаполняем на G2-G6. Выбираем альтернативу, где результат наименьший, вводим в G7: «A2».

Для критерия Байеса функция полезности вычисляется так же как и для предыдущего примера (но для 4-х состояний природы), в ячейку H2 формулу «=B2*0,2+C2*0,3+D2*0,3+E2*0,2», автозаполняем на H2-H6. Выбираем альтернативу с наименьшей функцией полезности, это A1, вводим в H7: «A1».

Для критерия Сэвиджа необходимо построить матрицу рисков. Для этого ставим курсор в ячейку B9 и вводим формулу «=B2-МИН(B$2:B$6)», автозаполняем результат на ячейки B9-E13. Далее находим максимальный риск для каждой альтернативы. Для этого ставим курсор в ячейку I2 и вводим «=МАКС(B9:E9)», автозаполняем результат на I2-I6. Выбираем альтернативу с минимальным риском, таких альтернатив две, это A1 и A4. Вводим в I7: «A1, A4».

Для критерия Гурвица нужно наименьшее значение каждой альтернативы умножить на α (по условию $\alpha = 0,7$), наибольшее на (1-α) и результаты сложить. Вводим в J2 формулу:

= МИН(B2:E2) *0,7+МАКС(B2:E2)*0,3

и автозаполняем результат на J2-J6. Выбираем альтернативу с наименьшей функцией полезности. Это A1, вводим J7: «A1». Задача решена.

Задание 1. *Директор торговой фирмы, продающей телевизоры, решил открыть представительство в областном центре. У него имеются альтернативы либо создавать собственный магазин в от-*

дельном помещении, либо организовывать сотрудничество с местными торговыми центрами. Всего можно выделить 5 альтернатив решения: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. *Успех торговой фирмы зависит от того, как сложится ситуация на рынке предоставляемых услуг. Эксперты выделяют 4 возможных варианта развития ситуации* S_1, S_2, S_3, S_4. *Прибыль фирмы для каждой альтернативы при каждой ситуации представлена матрицей выигрышей* a_{ij} *(млн. р./год).*

A_i \ B_j	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	a[1]	10	14	5
A_2	9	10	11	10
A_3	2	4	9	22
A_4	12	14	10	1
A_5	15	6	7	14

Выбрать наилучшую альтернативу, используя критерии Лапласа, Вальда, Байеса с $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}1$; $p_4 = 0{,}2$, *Сэвиджа и Гурвица при коэффициенте доверия* $\alpha = 0{,}6$.

Задание 2. *Нефтяная компания собирается построить в районе крайнего севера нефтяную вышку. Имеется 4 проекта A, B, C и D. Затраты на строительство (млн. руб.) зависят от того, какие погодные условия будут в период строительства. Возможны 5 вариантов погоды* S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. *Выбрать оптимальный проект для строительства используя критерии Лапласа, Вальда, Байеса с* $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}2$; $p_5 = 0{,}2$, *Сэвиджа и Гурвица при* $\alpha = 0{,}6$. *Матрица затрат имеет вид:*

A_i \ S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	a[1]	12	8	10	5
A_2	9	10	7	8	9
A_3	6	8	15	9	7
A_4	9	10	8	11	7

Выбрать наилучшую альтернативу, используя критерии Лапласа, Вальда, максимального оптимизма, Сэвиджа и Гурвица при коэффициенте доверия $\alpha = 0{,}5$.

[1] Величина *a* равна номеру варианта

Отчет по каждому заданию должен содержать функции полезности либо иные показатели каждого критерия, вывод о том, какую альтернативу следует принять.

Лабораторная работа № 7

ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ СПРОСА

Цель: используя методы моделирования с помощью целевой функции потребления научиться находить оптимальный набор благ потребителя, функции спроса на блага по цене, функции спроса по доходу с помощью ЭВМ.

Рассмотрим некоторого потребителя, который в результате своего существования потребляет некоторые блага. Уровень удовлетворения потребностей потребителя обозначим через U. Предположим, что имеется n видов благ $Б_1, Б_2, \ldots, Б_n$. Пусть количество потребления каждого блага равно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Целевой функцией потребления называется зависимость $U = U(x_1, x_2, ..., x_n)$. Каждый потребитель стремится максимизировать уровень удовлетворения потребностей, то есть $U \to \max$. Обозначим цену на единицу каждого блага через $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а доход потребителя через D. Тогда должно выполняться бюджетное ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \le D$. В результате для нахождения оптимального набора благ необходимо решать задачу оптимального программирования:

$$U(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max;$$
$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \le D; \\ x_i \ge 0, \ \ (i = 1, 2, ..., n). \end{cases}$$

Рассмотрим методы ее решения на примере.

ПРИМЕР. Пусть число благ равно трем, а функция потребления равна $U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$. Предположим, что цена на единицу первого блага равна 15, второго 10 и третьего 15, а доход потребителя составляет 500. Тогда задача примет вид:

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \to \max;$$
$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 + 15x_3 \le 500; \\ x_{1,2,3} \ge 0. \end{cases}$$

Подготовим данные для решения задачи в Excel согласно рисунку:

	A	B	C	D
1		Благо 1	Благо 2	Благо 3
2	Цена р	15	10	15
3	Количество х	1	1	1
4	Целевая		Доход	500
5	Ограничение			
6				

Вводим в ячейку B4 «=КОРЕНЬ(B3*C3*D3)» (кавычки не вводить!), а в B5 «=B3*B2+C3*C2+D3*D2». Запускаем СЕРВИС/ПОИСК РЕШЕНИЯ (Solver Add – in). В ячейку «Установить целевую» (Set Target Cell) устанавливаем ссылку на B4, проверить, что флажок ниже поля стоит напротив надписи «Равной максимальному значению» (Equal to … Max … Value of:). После ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» (By Changing Cell) и обводим ячейки с переменными B3, C3 и D3. Для того, чтобы ввести ограничения, наживают кнопку «Добавить» (Add), откроется окно «Добавление ограничения» (Add Constraints). В левом поле «Ссылка на ячейку» (Cell Reference) вводят ссылку на левую часть первого ограничения – ячейку B5, в центральном окне определяем знак ≤ и в правом «Ограничения» (Constraints) делаем ссылку на доход D4. Для ввода второго ограничения вновь нажимаем «Добавить» (Add), ставим курсор в левое поле и обводим ячейки B3, C3 и D3 в среднем окне ставим «≥» и в правом число 0. Нажимаем «Выполнить» (Solve), подтверждаем результаты, выбирая «Сохранить найденное решение» (Keep Solver Solution) и «ОК», получаем результат: $x_1 = 11{,}1$; $x_2 = 16{,}7$; $x_3 = 11{,}1$; целевая функция равна 45,4.

Решим теперь задачу нахождения функции спроса по цене. Найдем, например, спрос на второе благо для разных цен на единицу этого блага. Будем задавать цену на второе благо от 5 до 15 и фиксировать спрос x_2 при этих ценах. Введем в столбец F цену блага, а в столбец G спрос на него. Ставим курсор в F1 и вводим подпись «Цена», а в ячейку G1 вводим подпись «Спрос». В соответствии с условием задачи, цена второго блага составляет 10 денежных единиц, в результате решения спрос на это благо составляет $x_2 = 16{,}7$. Вводим в ячейку F7 значение цены 10, а в соседнюю G7 - спрос 16,7. Рассчитаем теперь спрос при цене 11. Исправляем в C2 значение на 11, вызываем СЕРВИС/ПОИСК РЕШЕНИЯ (Solver Add – in), нажимаем «Выполнить» (Solve), подтверждаем результаты. Видим в ячейке C3 новое значение спроса - $x_2 = 15{,}2$. Вводим в F8 вручную число 11, в G8 число 15,2. Точно также (обязательно проделать на ЭВМ!) изменяем в C2 значения на 12, 13, 14 и 15, записав эти же значения в F9-F12, каждый раз запускаем надстройку «Поиск решения», получаем новые результаты в C3, записываем их вручную (не копированием, округляя до десятых) в G9-G12. Далее рассчитываем значения спроса для цены меньшей 10 единиц. Для этого изменяем в C2 значения на 5, 6, 7, 8 и 9, записав эти значения в F2-F6, каждый раз запускаем надстройку «Поиск решения», получаем новые результаты в C3, записываем их в G2-G6. В результате, при правильном выполнении всех действий, получаем следующие результаты:

Ячейка	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12
Значение	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Ячейка	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12
Значение	**33,3**	**27,8**	**23,8**	**20,8**	**18,5**	**16,7**	**15,2**	**13,9**	**12,8**	**11,9**	**11,1**

Построим по полученным данным функцию спроса. Для этого ставим курсор в любую свободную ячейку, вызываем мастер диаграмм (ВСТАВКА/ДИАГРАММА), выбираем тип диаграммы «График», вид «График с маркерами» (левый второй сверху), нажимаем «Далее». Ставим курсор в поле «Диапазон» и обводим ячейки G2-G12. Переходим на закладку «Ряд» и ставим курсор в поле «Подписи оси X», обводим ячейки F2-F12, нажимаем «Готово». Получаем график функции спроса по цене. Точно также можно исследовать спрос и на первое и третье благо.

Найдем теперь функцию спроса по доходу на второе благо. Для этого будем менять доход в диапазоне 200-500 через 50 единиц, фиксируя спрос в ячейке C3. Вводим в H1 подпись «Доход», а в I1 подпись «Спрос». Исправляем в C2 цену на 10, а в D4 ставим доход 200. Вызываем и запускаем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ (Solver Add – in). Видим, что спрос на второе благо равен 6,7. Вводим в H2 значение дохода 200, а спрос 6,7 вводим в I2. Далее, по аналогии, изменяем в D4 доход на 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, занося эти данные в H3-H10, каждый раз запускаем надстройку ПОИСК РЕШЕНИЯ (Solver Add – in), полученный в C3 спрос вносим в ячейки I3-I10. При правильном расчете результаты будут 8,3; 10; 11,7; 13,3; 15; 16,7; 18,3; 20. По полученным данным, также как и для функции спроса по цене, строим график. Видно, что в данном случае график спроса по доходу прямая линия.

Следует отметить, что можно построить функцию перекрестного спроса на одно благо по цене на другое.

Задание. *Четырехфакторную целевую функцию потребления* $U = U(x_1, x_2, x_3, x_4)$, *цены на блага* p_1, p_2, p_3, p_4, *и доход* D *взять в соответствии с вариантом из таблицы.*

1. Составив и решив задачу оптимального программирования, найти оптимальный набор благ.

2. Составить функцию спроса на второе благо от его цены, взяв 5 целых последовательных значений цены до и после той, какая указана в таблице.

3. Составить функцию спроса на третье благо по доходу, взяв по четыре значения дохода до и после указанной в таблице с шагом 50.

Вар.	$U(x_1,x_2,x_3,x_4)$	p_1	p_2	p_3	p_4	D	Вар.	$U(x_1,x_2,x_3,x_4)$	p_1	p_2	p_3	p_4	D
1.	$\ln(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$	15	10	14	15	400	7.	$x_1 \cdot \sqrt{x_2 \cdot x_3} \cdot x_4$	20	10	8	17	950
2.	$\sqrt{x_1(x_2+7)x_3x_4}$	21	7	15	13	400	8.	$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$	14	12	8	9	500
3.	$\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4}$	17	19	16	21	350	9.	$\ln(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)$	9	17	11	10	800
4.	$\sqrt{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	15	10	9	15	500	10.	$x_1(x_2+1)x_3x_4$	15	10	9	8	600
5.	$x_1x_2x_3(x_4+3)$	16	18	11	21	500	11.	$x_1x_2(x_3+5)x_4$	11	19	13	11	650
6.	$\sqrt{x_1} \cdot x_2 \cdot \sqrt{x_3} \cdot x_4$	17	14	18	20	650	12.	$x_1 \cdot x_2 \cdot \sqrt{x_3} \cdot x_4$	8	16	14	20	700

ПРИМЕЧАНИЕ:
В ячейке с целевой функцией B4 должна содержаться функция вида:

1.	=LN(B3*C3*D3*E3)	7.	=КОРЕНЬ(C3*D3)*B3*E3
2.	=КОРЕНЬ(B3*(C3+7)*D3*E3)	8.	=КОРЕНЬ(B3*C3)*D3*E3
3.	=СТЕПЕНЬ(B3*C3*D3*E3; 0,33)	9.	=LN(B3*C3*D3*E3)
4.	=КОРЕНЬ(B3)*C3*D3*E3	10.	=B3*(C3+1)*D3*E3
5.	=B3*C3*D3*(E3+3)	11.	=B3*C3*(D3+5)*E3
6.	=КОРЕНЬ(B3*D3)*C3*E3	12.	=КОРЕНЬ(D3)*B3*C3*E3

Отчет должен содержать оптимальный набор благ x_1, x_2, *график функции спроса на второе благо от его цены* $x_2(p_2)$ *и график функции спроса на третье благо по доходу* $x_3(D)$.

Лабораторная работа № 8

БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

Цель: рассмотреть методы решения задач межотраслевого анализа на ЭВМ используя модель Леонтьева.

Балансовые модели предназначены для определения равновесного баланса между производством, потреблением и реализацией во внешнюю сферу продукции нескольких взаимосвязанных отраслей.

Рассмотрим решение межотраслевого баланса на ЭВМ в соответствии с моделью Леонтьева на следующем примере.

Имеется баланс трех взаимосвязанных отраслей за предыдущий период:

Производство	Потребление			Конечный продукт
	Отрасль 1	Отрасль 2	Отрасль 3	
Отрасль 1	17	13	11	83
Отрасль 2	8	16	9	97
Отрасль 3	21	15	13	132

1. Найти валовый продукт каждой отрасли, чистую продукцию каждой отрасли, матрицу коэффициентов прямых затрат.
2. Какой будет конечный продукт каждой отрасли, если валовый станет равен, соответственно 100, 150 и 200.
3. Какой будет валовый продукт каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли необходимо увеличить на 50 %, второй уменьшить на 4 единицы, а третьей увеличить на 6 единиц.

Подготавливаем таблицу исходных данных в электронной таблице Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Производство	Потребление			Конечный пр-т	Валовый пр-т	Нов. Конеч. 1	Нов. Вал. 1
2		отр. 1	отр. 2	отр. 3				
3	отрасль 1	17	13	11	83			
4	отрасль 2	8	16	9	97			
5	отрасль 3	21	15	13	132			
6	Чистая прибыль						Нов. Конеч. 2	Нов. Вал. 2
7	Коэффициенты							
8	затрат							

1. Для нахождения валового продукта каждой отрасли в ячейку F3 вводим формулу «=СУММ(B3:E3)» (для ее ввода достаточно нажать кнопку автосуммы со значком Σ). Результат – 124. Автозаполнением переносим результат ячейки на F4 и F5. Для рассчета чистой прибыли вводим в ячейку B6 формулу «=F3-B3-B4-B5», в C6 формулу «=F4-C3-C4-C5», в D6 формулу «=F5-D3-D4-D5». Находим коэффициенты прямых затрат. Для этого каждый столбец матрицы B3-D5 нажно разделить на соответствующий валовой продукт. В ячейку B7 вводим «=B3/$F$3» (чтобы сделать абсолютную ссылку $F$3 нужно щелкнуть по ячейки F3 и нажать клавишу F4). Автозаполняем B7 на B8 и B9. Аналогично вводим в C7 «=C3/$F$4» и автозаполняем на C8 и C9. Вводим в D7 «=D3/$F$5» и автозаполняем на D8 и D9. Матрица коэффициентов затрат рассчитана.

2. Так, как новый валовой продукт каждой отрасли равен, соответственно 100, 150 и 200, то вводим эти числа в ячейки H3, H4 и H5. По формуле, новый конечный продукт равен $Y = (E - A)X$. Для ее использования вводим единичную матрицу. В A11 вводим подпись «E=», а в B11-D13 вводим числа

1	0	0
0	1	0
0	0	1

. Рассчитываем матрицу (E-A). Вводим в A15 подпись «(E-A)=», а в B15 «=B11-B7». Автозаполняем ячейку на B15-D17. Для вычисления результата – новых значений конечного продукта в ячейку G3 вводим функцию перемножения матриц – МУМНОЖ (категория «Математические»). Аргументы функции: в поле «массив 1» даем ссылку B15:D17 (матрица E-A), в поле «массив 2» - H3:H5 (новый валовой продукт). Далее обводим ячейки G3-G5 курсором мыши, выделяя их, и нажимаем F2 и Ctrl+Shift+Enter. Результат – новый конечный продукт.

3. Если конечный продукт первой отрасли нужно увеличить на 50 %, то он станет 124,5, если второй уменьшить на 4, то он станет 93, если третий увеличить на 6 единиц, он будет 138. Вводим в ячейки G7-G9 числа 124,5; 93; 138. В соответствии с формулой Леонтьева новый валовый продукт находим по формуле $X = (E - A)^{-1}Y$. Для расчета обратной матрицы в ячейку E15 вводим подпись «(E-A) обрат.», а в F15 ставим формулу расчета обратной матрицы МОБР (категория «Математические»). Аргумент функции – ссылка на B15-D17. Обводим курсором ячейки F15-H17 и нажимаем F2 и Ctrl+Shift+Enter. Для вычисления новых значений валового продукта в ячейку H7 вводим функцию перемножения матриц – МУМНОЖ. Аргументы: в поле «массив 1» даем ссылку F15:H17, в поле «массив 2» - G7:G9. Далее обводим ячейки H7-H9 и нажимаем F2 и Ctrl+Shift+Enter. Результат – новый валовой продукт. Задача решена.

Задание. *Межотраслевой баланс производства и распределения продукции для 4 отраслей имеет вид*

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Валовой продукт
	1	2	3	4	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	X_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	X_2
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	X_3
4	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	X_4

Матрица межотраслевых материальных связей x_{ij} и матрица валового выпуска X_j приведены в таблице по вариантам.

Вариант	x_{ij}				X_j	Вариант	x_{ij}				X_j
1	60	50	5	90	800	7	30	90	85	60	775
	60	20	60	10	400		25	80	0	40	550
	85	85	75	40	800		50	75	85	40	625
	5	15	10	5	750		70	80	60	20	750
2	90	100	60	85	775	8	25	20	20	5	825
	70	25	100	65	825		60	45	90	50	750
	35	70	85	10	825		95	15	15	65	800
	25	65	65	90	600		45	45	10	35	400
3	30	35	40	55	550	9	60	40	30	65	400
	5	5	5	95	600		85	55	15	55	725
	65	10	0	15	575		20	70	50	55	850
	80	20	80	35	520		55	85	60	30	600
4	0	5	80	95	550	10	80	45	85	95	475
	15	60	20	40	750		25	35	20	30	825
	55	50	20	40	525		15	15	55	75	650
	0	35	10	60	820		95	5	5	95	820
5	15	70	40	30	725	11	65	50	5	80	525
	15	55	30	45	850		15	20	45	25	800
	60	65	25	90	500		90	70	20	85	675
	40	80	5	60	620		45	85	70	95	500
6	25	50	30	20	800	12	55	40	35	20	625
	35	45	20	25	750		25	30	45	35	700
	30	55	45	60	500		70	80	20	65	575
	20	30	25	50	520		35	55	60	75	600

1. Найти конечный продукт каждой отрасли, чистую продукцию каждой отрасли, матрицу коэффициентов прямых затрат.

2. Какой будет конечный продукт каждой отрасли, если валовой продукт первой отрасли увеличится в 2 раза, у второй увеличится на половину, у третьей не изменится, у четвертой – уменьшится на 10 процентов.

3. Найти валовой продукт, если конечный станет равен 700, 500, 850 и 700.

Отчет должен содержать полную балансовую таблицу для четырех отраслей, конечный продукт каждой отрасли при изменении валового, валовой продукт каждой отрасли при изменении конечного.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Мир, 1972.

2. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. — М.: ЮНИТИ, 1995.

3. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели в планировании. — М.: Экономика, 1987.

4. Колемаев В.А. Математическая экономика. М., 1996.

1. Кремер Н.Ш. и др. Исследование операций в экономике. - М.: ЮНИТИ, 1997.

5. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами EXCEL 7.0. — СПб.: BHV, 1997.

6. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Высшая школа, 1979.

7. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. М., 1992.

2. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. – М.: Изд-во УРАО, 1998.

3. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

8. Экономико-математические методы и прикладные модели / В.А. Половников и др. — М.: Финстатинформ, 1997.

9. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. — М.: ЮНИТИ, 1999.

10. Экономико-математические методы и прикладные модели Учебно-методическое пособие. /В.А. Половников, И.И Орлова, А.Н. Гармаш А.Н., Федосеев В.В. — М.: Финстатинформ, 1997.

11. Ясеновский С.В., Горбовцов Г.Я., Завьялкин Д.В. Методические указания по применению ППП для решения задач линейного программирования. — М.: МЭСИ, 1989.

СОДЕРЖАНИЕ